数学解析 第 8 回

～ 点列の極限と多変数関数の極限・連続性 (第 2 回) ～

桂田 祐史

2020 年 6 月 29 日

本日の内容&連絡事項

- 本日の授業内容
  4 章「点列の極限と多変数関数の極限・連続性」の第 2 回。
  前半 4.5 は、1 変数とあまり変わらない面を淡々と説明する。
  後半 4.6 が、数学解析の難所の一つ。
- 宿題 5 を出す。締め切りや提出方法はいつも通りで、7 月 4 日 18:00 までに Oh-o! Meiji に提出。

目次

$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} k(\vec{x})$, $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$, $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$ が存在するとき、

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left(\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})\right) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{g}(\vec{x}),$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left(k(\vec{x})\vec{f}(\vec{x})\right) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} k(\vec{x}) \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}),$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left(\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x})\right) = \left(\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}), \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{g}(\vec{x})\right),$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left(\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})\right) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \times \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \quad (\mathbb{R}^3 \text{ 限定}),$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left|\vec{f}(\vec{x})\right| = \left|\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x})\right|.$$

注意　$m > 1$ のとき、$\mathbb{R}^m$ のベクトル $\vec{g}(\vec{x})$ で「割る」演算はない。強いて言えば実数値関数の逆数をかけるくらい？

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left(\frac{1}{k(\vec{x})}\vec{f}(\vec{x})\right) = \frac{1}{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} k(\vec{x})} \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}).$$

合成関数の極限もこれまでと同様である。

命題 (合成関数の極限)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$, $\vec{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\vec{g}\colon \Omega' \to \mathbb{R}^\ell$, $\vec{f}(\Omega) \subset \Omega'$, $\vec{a} \in \overline{\Omega}$, $\vec{b} \in \overline{\Omega'}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^\ell$, $\displaystyle\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$, $\displaystyle\lim_{\vec{y}\to\vec{b}} \vec{g}(\vec{y}) = \vec{c}$ ならば、

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) = \vec{c}.$$

Proof.

1 変数実数値関数のときの証明を焼き直すだけでよい。省略！ □

4.5 多変数の連続関数　定義

連続性が 1 変数実数値関数と同様に (極限を用いて) 定義できる。

定義 (多変数関数の連続性)

$N, m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \Omega$ とする。

1. $\vec{f}$ が $\vec{a}$ で連続とは、$\displaystyle\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$ を満たすことをいう:
   $$\vec{f} \text{ が } \vec{a} \text{ で連続} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$$
2. $\vec{f}$ が Ω で連続 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall \vec{a} \in \Omega)$ $\vec{f}$ は $\vec{a}$ で連続.

- 連続関数を組み合わせたもの (和 $\vec{f} + \vec{g}$、差 $\vec{f} - \vec{g}$、スカラー倍 $\lambda\vec{f}$、内積 $\vec{f} \cdot \vec{g}$、長さ $\left|\vec{f}\right|$、合成 $\vec{g} \circ \vec{f}$ 等々) は連続関数
- $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ のとき、$\vec{f}$ が連続 $\Leftrightarrow$ 任意の j に対して f_j が連続

命題 (定数関数、座標関数は連続)

1. $c \in \mathbb{R}$ とする。定数関数 $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = c$ $(\vec{x} \in \mathbb{R}^n)$ は連続。
2. 任意の i $(1 \le i \le n)$ に対して、$g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(\vec{x}) = x_i$ $(\vec{x} \in \mathbb{R}^n)$ は連続。

Proof.

(1) 任意の $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon.$$

これから明らかである ($\delta := 1$ とおけば$\cdots$)。
(2) $\vec{a}$ は $\mathbb{R}^n$ の任意の要素とする。任意の正の数 ε に対して、$\delta := \varepsilon$ とおく。δ は正の数であり、$|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ を満たす任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$|g(\vec{x}) - g(\vec{a})| = |x_i - a_i| \le |\vec{x} - \vec{a}| < \delta = \varepsilon.$$

ゆえに g は $\vec{a}$ で連続である。したがって、g は $\mathbb{R}^n$ で連続である。 □

1. x, y と実数の定数から、足し算、掛け算で出来る式を x, y の **(実係数) 多項式**と呼ぶ。例: $P(x,y)=x^2-\frac{1}{2}xy+\sqrt{3}y^2+\pi^4x+(\log 5)y+6e$.

   同様にして、n 個の変数 $x_1,\cdots,x_n$ の実係数多項式 $P(x_1,\cdots,x_n)$ が定義される。$x_1,\cdots,x_n$ の実係数多項式の全体を $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ と表す。

2. $P(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ に対して、$f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を $f(\vec{x})=P(x_1,\cdots,x_n)$ $(\vec{x}\in\mathbb{R}^n)$ で定義出来る。この関数 f は **$\mathbb{R}^n$ 全体で連続**である。このように多項式で定義される関数を**多項式関数**と呼ぶ。普通は f でなく、多項式と同じ文字 P で表す。

3. 分母・分子が n 個の変数 $x_1,\cdots,x_n$ の実係数多項式 $P(x_1,\cdots,x_n)$, $Q(x_1,\cdots,x_n)$ である分数式 $R(x_1,\cdots,x_n)=\dfrac{Q(x_1,\cdots,x_n)}{P(x_1,\cdots,x_n)}$ を $x_1,\cdots,x_n$ の **(実係数) 有理式**と呼ぶ。$x_1,\cdots,x_n$ の実係数有理式の全体を $\mathbb{R}(x_1,\cdots,x_n)$ と表す。

4. $R(x_1,\cdots,x_n)=\dfrac{Q(x_1,\cdots,x_n)}{P(x_1,\cdots,x_n)}$ $(P(x_1,\cdots,x_n),Q(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n])$ に対して、

$$\Omega:=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid P(x_1,\cdots,x_n)\neq 0\}\quad(\text{分母が }0\text{ にならない点全体の集合})$$

   とおくと、$f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ が $f(\vec{x})=R(x_1,\cdots,x_n)$ $(\vec{x}\in\mathbb{R}^n)$ で定義出来る。この関数 f は **定義域 Ω 全体で連続**である。このように有理式で定義される関数を**有理関数**と呼ぶ。普通は f でなく、有理式と同じ文字 R で表す。

4.5 多変数の連続関数　例

$\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を次式で定めると、$\vec{f}$ は $\mathbb{R}^2$ で連続であることを示せ。

$$\vec{f}(x,y) := \begin{pmatrix} x+2y \\ \dfrac{3x+4}{5x^2+6y^2+7} \\ \log\left(8e^x+9\right) \end{pmatrix}$$

(証明)

(i) $f_1(x,y) := x+2y$ で $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を定めると、f_1 は $\mathbb{R}^2$ で連続である ($\because$ 多項式関数だから)。

(ii) $P(x,y) := 5x^2+6y^2+7$, $Q(x,y) := 3x+4$, $f_2(x,y) := \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ とおくと、$P(x,y), Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$. 任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、$P(x,y) \geq 7$ であるから $P(x,y) \neq 0$. ゆえに $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が定義出来て、連続である ($\because$ 有理関数だから)。

(iii) $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $s\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$p(x,y) := x, \quad q(z) = e^z, \quad r(u) = 8u+9, \quad s(v) = \log v$$

で定めると、いずれも連続関数である (p, r は多項式関数、q と s については既知)。$p(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} = q$ の定義域,
$q(\mathbb{R}) = (0,\infty) = r$ の定義域,
$r((0,\infty)) = (9,\infty) \subset (0,\infty) = s$ の定義域 であるから、合成関数 $f_3 := s \circ r \circ q \circ p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が定義できて、連続である。

(i), (ii), (iii) より、f_1, f_2, $f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続であるから、$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ で連続である。 $\square$

極限についての性質は 1 変数関数と同様に済むことが多いが、注意が必要な場合もある。それについて 2 変数、実数値の関数で説明する。

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{R}$ とするとき

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$
$$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall(x,y) \in \Omega : |(x,y)-(a,b)| < \delta) \quad |f(x,y)-A| < \varepsilon.$$

$(x,y) \to (a,b)$ は、xy 平面における (x,y) と (a,b) の距離を 0 に近づけるということである。

1 変数の場合、x を a に近づけるには、右から近づける場合と、左から近づける場合に分けて考えれば良かった。(右極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ と左極限 $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ がともに A に等しければ、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し、 A に等しい)。多変数の場合は、色々な近づけ方がある。

4.6 多変数の関数の極限についての注意　図で説明

$$\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \Omega)$$

で、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ を定めると、これは有理関数であり、Ω で連続である。

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を調べよう。

まず、x 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

同様に、y 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

一方、任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して、直線 $y = kx$ に沿って $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

これが k に依存するので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない (次の定理を用いる)。 □

4.6 多変数の関数の極限についての注意　鍵となる定理

要点　関数が極限を持つならば、その制限も同じ極限を持つ。

定義 (制限写像 (実は数理リテラシーの復習))

X, Y, A は集合、$A \neq \emptyset$, $A \subset X$, $f \colon X \to Y$ は写像とする。このとき

$$g(x) = f(x) \quad (x \in A)$$

で定まる写像 $g \colon A \to Y$ を、f の A への**制限**と呼び、$f|_A$ と表す。

例

$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad g(x) = x^2 \quad (x \in [0, \infty))$$

で定める。g は f の $[0, \infty)$ への制限である。

$$g = f\Big|_{[0,\infty)} .$$

4.6 多変数の関数の極限についての注意　鍵となる定理

定理 (関数が極限を持つならば、その制限も同じ極限を持つ。)

$\emptyset \neq \Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \overline{\Omega'}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$, $\displaystyle\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(x) = \vec{A}$ が成り立つとき

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \left.\vec{f}\right|_{\Omega'}(\vec{x}) = \vec{A}. \tag{1}$$

この (1) の左辺のことを $\displaystyle\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a} \\ \vec{x}\in\Omega'}} \vec{f}(\vec{x})$ と表す。

証明　仮定より、任意の正の数 ε に対して、ある正の数 δ が存在して

$$(\forall \vec{x} \in \Omega : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta) \quad \left|\vec{f}(\vec{x}) - A\right| < \varepsilon$$

が成り立つ。$\Omega' \subset \Omega$ であることと、$\vec{x} \in \Omega'$ に対して $f|_{\Omega'}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x})$ であることから

$$(\forall \vec{x} \in \Omega' : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta) \quad \left|\left.\vec{f}\right|_{\Omega'}(\vec{x}) - A\right| < \varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{\vec{x}\to a} \left.\vec{f}\right|_{\Omega'}(\vec{x}) = A.$ □

4.6 多変数の関数の極限についての注意　定理の使い道

「関数が極限を持つならば、それを制限した関数も同じ極限を持つ。」という定理の証明は (上に見たように) 簡単であった (そのせいかテキストには載っていないことが多い)。

しかし、色々な使い道がある。

(a) f のある制限が極限を持たなければ、f は極限を持たない。
(b) f のある 2 つの制限が極限を持ち、それらが一致しなければ、f は極限を持たない。
(c) f のある制限が極限 $\vec{A}$ を持つとき、もし f が極限を持つならば、それは $\vec{A}$ 以外ではありえない。

上の例では、(b) を用いた。制限の極限は実質的に 1 変数関数になっていて考えやすい、というのがポイントである。

次の例では (c) を用いる。

4.6 多変数の関数の極限についての注意　例 2

$$\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \Omega)$$

で定めた $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は有理関数であり、Ω で連続である。$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を調べよう。任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2}x = 0.$$

ゆえに、もしも極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在するならば、それは 0 である (定理 1)。$f(x,y)$ が 0 に収束するかを確かめれば良い。

$$0 \le |f(x,y) - 0| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} = |y|\frac{x^2}{x^2+y^2} \le |y|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |y|.$$

$(x,y) \to (0,0)$ のとき、$|y| \to 0$ であるから、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0. \quad \square$$

$$\Omega := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+y\neq 0\right\},\quad f(x,y)=\frac{xy}{x+y}\quad ((x,y)\in\Omega).$$

任意の $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ に対して ($k=-1$ のとき直線 $y=kx$ は Ω に含まれることに注意する)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x(1+k)}=\frac{k}{1+k}\lim_{x\to 0}x=0.$$

ゆえに、もしも極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在するならば、それは 0 である (定理 1)。

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{xy}{x+y}\right|.$$

極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を導入し、$\theta + \pi/4 = \varphi$ とおくと

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r(\cos\theta+\sin\theta)}\right| = r\left|\frac{\frac{1}{2}\sin(2\theta)}{\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)}\right|$$
$$= \frac{r}{2\sqrt{2}}\left|\frac{\sin(2\varphi-\pi/2)}{\sin\varphi}\right| = \frac{r}{2\sqrt{2}}\left|\frac{\cos(2\varphi)}{\sin\varphi}\right|.$$

この右辺は、$r \to 0$ としても 0 には収束しない。実際 $\varphi = r$ という関係を保って $r \to 0$ とするとき、

$$|f(x,y)-0| = \frac{\varphi}{2\sqrt{2}}\cdot\left|\frac{\cos(2\varphi)}{\sin\varphi}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\cos(2\varphi) \to \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。 □

上の 3 つの例の関数のグラフや等高線を Mathematica で描いてみよう。

```
Clear[f]
f[x_,y_]:=x*y/(x^2+y^2)

g1=Plot3D[f[x,y],{x,-1,1},{y,-1,1}]

g2=ContourPlot[f[x,y],{x,-1,1},{y,-1,1}]

Export["graph_f.png", g1]
```

- Finder でアプリケーションの中を探すと Mathematica が見つかるはず。
- もしもライセンスが切れていたら、池田先生か桂田にアクティベーション・キーを発行してもらう。

4.6 多変数関数の極限に関する注意　まとめ

$(x,y) \to (0,0)$ のときの $f(x,y)$ の極限を調べる $y = kx$ 作戦

1. 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{\substack{y=kx \\ (x,y)\to(0,0)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx)$ を調査
   - その極限が存在しなければ、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。
   - その極限が存在する場合、それを A_k とおく。
2. A_k が k に依存するならば、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。
3. A_k が実際には k に依存しない、つまり $(\exists A \in \mathbb{R})\ (\forall k)\ A_k = A$ が成り立つならば、次のどちらかが成り立つ。
   a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A.$
   b. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。

   (a), (b) のどちらであるかを判定するには、$|f(x,y) - A|$ が 0 に収束するかどうかを判定すれば良い。

(多分、覚えるより、理解した方が楽)

4.6 多変数関数の極限に関する注意　まとめ

次のことを理解しよう。

- $y = kx$ 以外に、問題に応じて $y = kx^2$ とか、色々な曲線を選ぶこともありえる。
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ に比べて、$\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)$ は、1 変数関数の極限なので格段に計算しやすい。2 変数関数は、その関数がどんな関数か分かりにくいことがある。曲線に沿った極限を取るのは、次元を落として計算しやすくする工夫である。
- 最初の $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を調べるという問題に比べて、具体的に得られた A に対して $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - A|$ が 0 であるかどうか調べる、というのは、ある程度簡単になった問題である。

コンピューターがあるならば、グラフを描いてみるのも良いかも。

4.6 多変数関数の極限に関する注意　(おまけ)　0^0

$$\Omega := \{(x,y) \mid x \geq 0 \land y \geq 0\} \setminus \{(0,0)\} \quad \text{(図示すること)}$$

として $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = x^y$$

で定める。$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。実際

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to+0} x^0 = \lim_{x\to+0} 1 = 1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to+0} 0^y = \lim_{y\to+0} 0 = 0$$

であるから。通常 0^0 は定義しないが、それは 0^0 をどう定義しても、この f が $(0,0)$ で連続にはならないのが嫌だから、ということらしい (明記してある本は見たことないが)。

もっとも、多項式を $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ のように表すために、x が何であっても $x^0 = 1$ とすることは多い (大抵の場合、断りなく行われる)。微積分でも、Taylor の定理に現れる式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k$$

は h の多項式であるから、初項の因子 $h^k = h^0$ については、$h = 0$ のときも 1 であるとして扱う。