

数学解析 第8回

～ 点列の極限と多変数関数の極限・連続性 (第2回) ～

桂田 祐史

2020年6月29日

本日の内容&連絡事項

- 本日の授業内容
 - 4章「点列の極限と多変数関数の極限・連続性」の第2回。
 - 前半 4.5 は、1変数とあまり変わらない面を淡々と説明する。
 - 後半 4.6 が、数学解析の難所の一つ。
- 宿題5を出す。締め切りや提出方法はいつも通りで、7月4日 18:00までに Oh-o! Meiji に提出。

- ① 点列の極限と多変数関数の極限・連続性
 - 多変数関数とその極限
 - 和・差・積・ノルム
 - 合成関数
 - 多変数の連続関数
 - 定義
 - 定数関数と座標関数の連続性
 - 多項式関数、有理関数の連続性
 - 例
 - 多変数の関数の極限についての注意
 - はじめに
 - 図で説明
 - 例 1
 - 鍵となる定理
 - 定理の使い道
 - 例 2
 - 例 3
 - まとめ
 - おまけ

4.4 多変数関数とその極限 (続き) 和・差・積・ノルム

$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} k(\vec{x})$, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x})$ が存在するとき、

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x}) \right) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}),$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(k(\vec{x}) \vec{f}(\vec{x}) \right) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} k(\vec{x}) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}),$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x}) \right) = \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}), \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \right),$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) \right) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \times \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \quad (\mathbb{R}^3 \text{ 限定}),$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \vec{f}(\vec{x}) \right| = \left| \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \right|.$$

注意 $m > 1$ のとき、 \mathbb{R}^m のベクトル $\vec{g}(\vec{x})$ で「割る」演算はない。強いて言えば実数値関数の逆数をかけるくらい？

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\frac{1}{k(\vec{x})} \vec{f}(\vec{x}) \right) = \frac{1}{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} k(\vec{x})} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}).$$

4.4 多変数関数とその極限 (続き) 合成関数

合成関数の極限もこれまでと同様である。

命題 (合成関数の極限)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$, $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{g}: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, $\vec{f}(\Omega) \subset \Omega'$, $\vec{a} \in \overline{\Omega}$,
 $\vec{b} \in \overline{\Omega'}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^\ell$, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$, $\lim_{\vec{y} \rightarrow \vec{b}} \vec{g}(\vec{y}) = \vec{c}$ ならば、

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) = \vec{c}.$$

Proof.

1 変数実数値関数のときの証明を焼き直すだけでよい。省略! □

4.5 多変数の連続関数 定義

4.5 多変数の連続関数 定義

連続性が1変数実数値関数と同様に(極限を用いて)定義できる。

4.5 多変数の連続関数 定義

連続性が1変数実数値関数と同様に(極限を用いて)定義できる。

定義 (多変数関数の連続性)

$N, m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \Omega$ とする。

① \vec{f} が \vec{a} で連続とは、 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$ を満たすことをいう:

$$\vec{f} \text{ が } \vec{a} \text{ で連続} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$$

② \vec{f} が Ω で連続 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall \vec{a} \in \Omega) \vec{f}$ は \vec{a} で連続.

4.5 多変数の連続関数 定義

連続性が1変数実数値関数と同様に(極限を用いて)定義できる。

定義 (多変数関数の連続性)

$N, m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \Omega$ とする。

① \vec{f} が \vec{a} で連続とは、 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$ を満たすことをいう:

$$\vec{f} \text{ が } \vec{a} \text{ で連続} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$$

② \vec{f} が Ω で連続 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall \vec{a} \in \Omega) \vec{f}$ は \vec{a} で連続.

- 連続関数を組み合わせたもの(和 $\vec{f} + \vec{g}$ 、差 $\vec{f} - \vec{g}$ 、スカラー倍 $\lambda \vec{f}$ 、内積 $\vec{f} \cdot \vec{g}$ 、長さ $|\vec{f}|$ 、合成 $\vec{g} \circ \vec{f}$ 等々)は連続関数

4.5 多変数の連続関数 定義

連続性が1変数実数値関数と同様に(極限を用いて)定義できる。

定義 (多変数関数の連続性)

$N, m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \Omega$ とする。

① \vec{f} が \vec{a} で連続とは、 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$ を満たすことをいう:

$$\vec{f} \text{ が } \vec{a} \text{ で連続} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$$

② \vec{f} が Ω で連続 $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall \vec{a} \in \Omega) \vec{f}$ は \vec{a} で連続.

● 連続関数を組み合わせたもの(和 $\vec{f} + \vec{g}$ 、差 $\vec{f} - \vec{g}$ 、スカラー倍 $\lambda \vec{f}$ 、内積 $\vec{f} \cdot \vec{g}$ 、長さ $|\vec{f}|$ 、合成 $\vec{g} \circ \vec{f}$ 等々)は連続関数

● $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ のとき、 \vec{f} が連続 \Leftrightarrow 任意の j に対して f_j が連続

4.5 多変数の連続関数 定数関数と座標関数の連続性

4.5 多変数の連続関数 定数関数と座標関数の連続性

命題 (定数関数、座標関数は連続)

- ① $c \in \mathbb{R}$ とする。定数関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = c$ ($\vec{x} \in \mathbb{R}^n$) は連続。
- ② 任意の i ($1 \leq i \leq n$) に対して、 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\vec{x}) = x_i$ ($\vec{x} \in \mathbb{R}^n$) は連続。

4.5 多変数の連続関数 定数関数と座標関数の連続性

命題 (定数関数、座標関数は連続)

- ① $c \in \mathbb{R}$ とする。定数関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = c$ ($\vec{x} \in \mathbb{R}^n$) は連続。
- ② 任意の i ($1 \leq i \leq n$) に対して、 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\vec{x}) = x_i$ ($\vec{x} \in \mathbb{R}^n$) は連続。

Proof.

(1) 任意の $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon.$$

これから明らかである ($\delta := 1$ とおけば…).

(2) \vec{a} は \mathbb{R}^n の任意の要素とする。任意の正の数 ε に対して、 $\delta := \varepsilon$ とおく。 δ は正の数であり、 $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ を満たす任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$|g(\vec{x}) - g(\vec{a})| = |x_i - a_i| \leq |\vec{x} - \vec{a}| < \delta = \varepsilon.$$

ゆえに g は \vec{a} で連続である。したがって、 g は \mathbb{R}^n で連続である。 □

4.5 多変数の連続関数 多項式関数, 有理関数の連続性

4.5 多変数の連続関数 多項式関数, 有理関数の連続性

- ④ x, y と実数の定数から、足し算、掛け算で出来る式を x, y の **(実係数) 多項式** と呼ぶ。例: $P(x, y) = x^2 - \frac{1}{2}xy + \sqrt{3}y^2 + \pi^4x + (\log 5)y + 6e$.

4.5 多変数の連続関数 多項式関数, 有理関数の連続性

- ④ x, y と実数の定数から、足し算、掛け算で出来る式を x, y の **(実係数) 多項式** と呼ぶ。例: $P(x, y) = x^2 - \frac{1}{2}xy + \sqrt{3}y^2 + \pi^4x + (\log 5)y + 6e$.

同様にして、 n 個の変数 x_1, \dots, x_n の実係数多項式 $P(x_1, \dots, x_n)$ が定義される。
 x_1, \dots, x_n の実係数多項式の全体を $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ と表す。

4.5 多変数の連続関数 多項式関数, 有理関数の連続性

- ① x, y と実数の定数から、足し算、掛け算で出来る式を x, y の **(実係数) 多項式** と呼ぶ。例: $P(x, y) = x^2 - \frac{1}{2}xy + \sqrt{3}y^2 + \pi^4x + (\log 5)y + 6e$.

同様にして、 n 個の変数 x_1, \dots, x_n の実係数多項式 $P(x_1, \dots, x_n)$ が定義される。
 x_1, \dots, x_n の実係数多項式の全体を $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ と表す。

- ② $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ に対して、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(\vec{x}) = P(x_1, \dots, x_n)$ ($\vec{x} \in \mathbb{R}^n$) で定義出来る。この関数 f は **\mathbb{R}^n 全体で連続**である。このように多項式で定義される関数を**多項式関数**と呼ぶ。普通は f でなく、多項式と同じ文字 P で表す。

- ③ 分母・分子が n 個の変数 x_1, \dots, x_n の実係数多項式 $P(x_1, \dots, x_n)$, $Q(x_1, \dots, x_n)$ である分数式 $R(x_1, \dots, x_n) = \frac{Q(x_1, \dots, x_n)}{P(x_1, \dots, x_n)}$ を x_1, \dots, x_n の **(実係数) 有理式**と呼ぶ。 x_1, \dots, x_n の実係数有理式の全体を $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$ と表す。

4.5 多変数の連続関数 多項式関数, 有理関数の連続性

- ① x, y と実数の定数から、足し算、掛け算で出来る式を x, y の **(実係数) 多項式** と呼ぶ。例: $P(x, y) = x^2 - \frac{1}{2}xy + \sqrt{3}y^2 + \pi^4x + (\log 5)y + 6e$.

同様にして、 n 個の変数 x_1, \dots, x_n の実係数多項式 $P(x_1, \dots, x_n)$ が定義される。
 x_1, \dots, x_n の実係数多項式の全体を $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ と表す。

- ② $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ に対して、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(\vec{x}) = P(x_1, \dots, x_n)$ ($\vec{x} \in \mathbb{R}^n$) で定義出来る。この関数 f は **\mathbb{R}^n 全体で連続** である。このように多項式で定義される関数を **多項式関数** と呼ぶ。普通は f でなく、多項式と同じ文字 P で表す。

- ③ 分母・分子が n 個の変数 x_1, \dots, x_n の実係数多項式 $P(x_1, \dots, x_n)$, $Q(x_1, \dots, x_n)$ である分数式 $R(x_1, \dots, x_n) = \frac{Q(x_1, \dots, x_n)}{P(x_1, \dots, x_n)}$ を x_1, \dots, x_n の **(実係数) 有理式** と呼ぶ。 x_1, \dots, x_n の実係数有理式の全体を $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_n)$ と表す。

- ④ $R(x_1, \dots, x_n) = \frac{Q(x_1, \dots, x_n)}{P(x_1, \dots, x_n)}$ ($P(x_1, \dots, x_n), Q(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$) に対して、

$$\Omega := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid P(x_1, \dots, x_n) \neq 0\} \quad (\text{分母が } 0 \text{ にならない点全体の集合})$$

とおくと、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が $f(\vec{x}) = R(x_1, \dots, x_n)$ ($\vec{x} \in \mathbb{R}^n$) で定義出来る。この関数 f は **定義域 Ω 全体で連続** である。このように有理式で定義される関数を **有理関数** と呼ぶ。普通は f でなく、有理式と同じ文字 R で表す。

4.5 多変数の連続関数 例

$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を次式で定めると、 \vec{f} は \mathbb{R}^2 で連続であることを示せ。

$$\vec{f}(x, y) := \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4 \\ \frac{5x^2 + 6y^2 + 7}{\log(8e^x + 9)} \end{pmatrix}$$

4.5 多変数の連続関数 例

$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を次式で定めると、 \vec{f} は \mathbb{R}^2 で連続であることを示せ。

$$\vec{f}(x, y) := \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4 \\ \frac{5x^2 + 6y^2 + 7}{\log(8e^x + 9)} \end{pmatrix}$$

(証明)

- ① $f_1(x, y) := x + 2y$ で $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を定めると、 f_1 は \mathbb{R}^2 で連続である (\because 多項式関数だから)。

4.5 多変数の連続関数 例

$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を次式で定めると、 \vec{f} は \mathbb{R}^2 で連続であることを示せ。

$$\vec{f}(x, y) := \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4 \\ \frac{5x^2 + 6y^2 + 7}{\log(8e^x + 9)} \end{pmatrix}$$

(証明)

- ① $f_1(x, y) := x + 2y$ で $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を定めると、 f_1 は \mathbb{R}^2 で連続である (\because 多項式関数だから)。
- ② $P(x, y) := 5x^2 + 6y^2 + 7$, $Q(x, y) := 3x + 4$, $f_2(x, y) := \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ とおくと、 $P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$. 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、 $P(x, y) \geq 7$ であるから $P(x, y) \neq 0$. ゆえに $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が定義出来て、連続である (\because 有理関数だから)。

4.5 多変数の連続関数 例 (続き)

iii) $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $r: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $s: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$p(x, y) := x, \quad q(z) = e^z, \quad r(u) = 8u + 9, \quad s(v) = \log v$$

で定めると、いずれも連続関数である (p, r は多項式関数、 q と s については既知)。 $p(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} = q$ の定義域,
 $q(\mathbb{R}) = (0, \infty) = r$ の定義域,
 $r((0, \infty)) = (9, \infty) \subset (0, \infty) = s$ の定義域 であるから、合成関数
 $f_3 := s \circ r \circ q \circ p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が定義できて、連続である。

4.5 多変数の連続関数 例 (続き)

iii) $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $r: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $s: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$p(x, y) := x, \quad q(z) = e^z, \quad r(u) = 8u + 9, \quad s(v) = \log v$$

で定めると、いずれも連続関数である (p, r は多項式関数、 q と s については既知)。 $p(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} = q$ の定義域,

$q(\mathbb{R}) = (0, \infty) = r$ の定義域,

$r((0, \infty)) = (9, \infty) \subset (0, \infty) = s$ の定義域 であるから、合成関数 $f_3 := s \circ r \circ q \circ p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が定義できて、連続である。

(i), (ii), (iii) より、 $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であるから、 $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

は \mathbb{R}^2 で連続である。 □

4.6 多変数の関数の極限についての注意

はじめに

4.6 多変数の関数の極限についての注意

はじめに

極限についての性質は1変数関数と同様に済むことが多いが、注意が必要な場合もある。それについて2変数、実数値の関数で説明する。

4.6 多変数の関数の極限についての注意

はじめに

極限についての性質は1変数関数と同様に済むことが多いが、注意が必要な場合もある。それについて2変数、実数値の関数で説明する。

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{R}$ とするとき

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y) \in \Omega : |(x,y) - (a,b)| < \delta) \quad |f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

4.6 多変数の関数の極限についての注意

はじめに

極限についての性質は1変数関数と同様に済むことが多いが、注意が必要な場合もある。それについて2変数、実数値の関数で説明する。

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{R}$ とするとき

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y) \in \Omega : |(x,y) - (a,b)| < \delta) \quad |f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

$(x,y) \rightarrow (a,b)$ は、 xy 平面における (x,y) と (a,b) の距離を0に近づけるということである。

4.6 多変数の関数の極限についての注意

はじめに

極限についての性質は1変数関数と同様に済むことが多いが、注意が必要な場合もある。それについて2変数、実数値の関数で説明する。

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{R}$ とするとき

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y) \in \Omega : |(x,y) - (a,b)| < \delta) \quad |f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

$(x,y) \rightarrow (a,b)$ は、 xy 平面における (x,y) と (a,b) の距離を0に近づけるということである。

1変数の場合、 x を a に近づけるには、右から近づける場合と、左から近づける場合に分けて考えれば良かった。(右極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と左極限

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ がともに A に等しければ、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し、 A に等しい)。

多変数の場合は、色々な近づけ方がある。

4.6 多変数の関数の極限についての注意 図で説明

4.6 多変数の関数の極限についての注意 例1 (有名)

$$\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \in \Omega)$$

4.6 多変数の関数の極限についての注意 例1 (有名)

$$\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad ((x,y) \in \Omega)$$

で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を定めると、これは有理関数であり、 Ω で連続である。

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ を調べよう。

4.6 多変数の関数の極限についての注意 例1 (有名)

$$\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad ((x,y) \in \Omega)$$

で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を定めると、これは有理関数であり、 Ω で連続である。

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ を調べよう。

まず、 x 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

同様に、 y 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

4.6 多変数の関数の極限についての注意 例1 (有名)

$$\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad ((x,y) \in \Omega)$$

で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を定めると、これは有理関数であり、 Ω で連続である。

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ を調べよう。

まず、 x 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

同様に、 y 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

一方、任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して、直線 $y = kx$ に沿って $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

これが k に依存するので、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ は存在しない (次の定理を用いる)。

4.6 多変数の関数の極限についての注意 鍵となる定理

要点 関数が極限を持つならば、その**制限**も同じ極限を持つ。

4.6 多変数の関数の極限についての注意 鍵となる定理

要点 関数が極限を持つならば、その**制限**も同じ極限を持つ。

定義 (制限写像 (実は数理リテラシーの復習))

X, Y, A は集合、 $A \neq \emptyset$, $A \subset X$, $f: X \rightarrow Y$ は写像とする。このとき

$$g(x) = f(x) \quad (x \in A)$$

で定まる写像 $g: A \rightarrow Y$ を、 f の A への**制限**と呼び、 $f|_A$ と表す。

4.6 多変数の関数の極限についての注意 鍵となる定理

要点 関数が極限を持つならば、その**制限**も同じ極限を持つ。

定義 (制限写像 (実は数理リテラシーの復習))

X, Y, A は集合、 $A \neq \emptyset, A \subset X, f: X \rightarrow Y$ は写像とする。このとき

$$g(x) = f(x) \quad (x \in A)$$

で定まる写像 $g: A \rightarrow Y$ を、 f の A への**制限**と呼び、 $f|_A$ と表す。

例

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad g(x) = x^2 \quad (x \in [0, \infty))$$

で定める。 g は f の $[0, \infty)$ への制限である。

$$g = f|_{[0, \infty)} .$$

4.6 多変数の関数の極限についての注意 鍵となる定理

定理 (関数が極限を持つならば、その制限も同じ極限を持つ。)

$\emptyset \neq \Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \overline{\Omega'}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(x) = \vec{A}$ が成り立つとき

$$(1) \quad \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{a} \\ \vec{x} \in \Omega'}} \vec{f}|_{\Omega'}(\vec{x}) = \vec{A}.$$

この (1) の左辺のことを $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{a} \\ \vec{x} \in \Omega'}} \vec{f}(\vec{x})$ と表す。

4.6 多変数の関数の極限についての注意 鍵となる定理

定理 (関数が極限を持つならば、その制限も同じ極限を持つ。)

$\emptyset \neq \Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \overline{\Omega'}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(x) = \vec{A}$ が成り立つとき

$$(1) \quad \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{a} \\ \vec{x} \in \Omega'}} \vec{f}|_{\Omega'}(\vec{x}) = \vec{A}.$$

この (1) の左辺のことを $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{a} \\ \vec{x} \in \Omega'}} \vec{f}(\vec{x})$ と表す。

証明 仮定より、任意の正の数 ε に対して、ある正の数 δ が存在して

$$(\forall \vec{x} \in \Omega : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta) \quad \left| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{A} \right| < \varepsilon$$

が成り立つ。

4.6 多変数の関数の極限についての注意 鍵となる定理

定理 (関数が極限を持つならば、その制限も同じ極限を持つ。)

$\emptyset \neq \Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \overline{\Omega'}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$, $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{a} \\ \vec{x} \in \Omega'}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A}$ が
成り立つとき

$$(1) \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}|_{\Omega'}(\vec{x}) = \vec{A}.$$

この (1) の左辺のことを $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{a} \\ \vec{x} \in \Omega'}} \vec{f}(\vec{x})$ と表す。

証明 仮定より、任意の正の数 ε に対して、ある正の数 δ が存在して

$$(\forall \vec{x} \in \Omega : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta) \quad \left| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{A} \right| < \varepsilon$$

が成り立つ。 $\Omega' \subset \Omega$ であることと、 $\vec{x} \in \Omega'$ に対して $f|_{\Omega'}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x})$ であることから

$$(\forall \vec{x} \in \Omega' : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta) \quad \left| \vec{f}|_{\Omega'}(\vec{x}) - \vec{A} \right| < \varepsilon.$$

ゆえに $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}|_{\Omega'}(\vec{x}) = \vec{A}.$

4.6 多変数の関数の極限についての注意 定理の使い道

「関数が極限を持つならば、それを制限した関数も同じ極限を持つ。」
という定理の証明は(上に見たように)簡単であった(そのせいかテキストには載っていないことが多い)。

しかし、色々な使い道がある。

- Ⓐ f のある制限が極限を持たなければ、 f は極限を持たない。
- Ⓑ f のある2つの制限が極限を持ち、それらが一致しなければ、 f は極限を持たない。
- Ⓒ f のある制限が極限 \vec{A} を持つとき、もし f が極限を持つならば、それは \vec{A} 以外ではありえない。

4.6 多変数の関数の極限についての注意 定理の使い道

「関数が極限を持つならば、それを制限した関数も同じ極限を持つ。」という定理の証明は(上に見たように)簡単であった(そのせいかテキストには載っていないことが多い)。

しかし、色々な使い道がある。

- Ⓐ f のある制限が極限を持たなければ、 f は極限を持たない。
- Ⓑ f のある2つの制限が極限を持ち、それらが一致しなければ、 f は極限を持たない。
- Ⓒ f のある制限が極限 \vec{A} を持つとき、もし f が極限を持つならば、それは \vec{A} 以外ではありえない。

上の例では、(b) を用いた。制限の極限は実質的に1変数関数になっていて考えやすい、というのがポイントである。

4.6 多変数の関数の極限についての注意 定理の使い道

「関数が極限を持つならば、それを制限した関数も同じ極限を持つ。」という定理の証明は(上に見たように)簡単であった(そのせいかテキストには載っていないことが多い)。

しかし、色々な使い道がある。

- Ⓐ f のある制限が極限を持たなければ、 f は極限を持たない。
- Ⓑ f のある2つの制限が極限を持ち、それらが一致しなければ、 f は極限を持たない。
- Ⓒ f のある制限が極限 \vec{A} を持つとき、もし f が極限を持つならば、それは \vec{A} 以外ではありえない。

上の例では、(b) を用いた。制限の極限は実質的に1変数関数になっていて考えやすい、というのがポイントである。

次の例では (c) を用いる。

4.6 多変数の関数の極限についての注意 例2

$$\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad ((x,y) \in \Omega)$$

で定めた $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は有理関数であり、 Ω で連続である。

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ を調べよう。任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{1 + k^2} x = 0.$$

ゆえに、もしも極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ が存在するならば、それは0である (定理1)。 $f(x,y)$ が0に収束するかを確かめれば良い。

$$0 \leq |f(x,y) - 0| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |y| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = |y|.$$

$(x,y) \rightarrow (0,0)$ のとき、 $|y| \rightarrow 0$ であるから、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0. \quad \square$$

4.6 多変数関数の極限に関する注意 例3 (1)

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \neq 0\}, \quad f(x, y) = \frac{xy}{x + y} \quad ((x, y) \in \Omega).$$

任意の $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ に対して ($k = -1$ のとき直線 $y = kx$ は Ω に含まれることに注意する)

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x(1+k)} = \frac{k}{1+k} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

ゆえに、もしも極限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ が存在するならば、それは 0 である (定理 1)。

4.6 多変数関数の極限に関する注意 例3 (2)

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{xy}{x+y} \right|.$$

極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を導入し、 $\theta + \pi/4 = \varphi$ とおくと

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r(\cos \theta + \sin \theta)} \right| = r \left| \frac{\frac{1}{2} \sin(2\theta)}{\sqrt{2} \sin(\theta + \pi/4)} \right| \\ &= \frac{r}{2\sqrt{2}} \left| \frac{\sin(2\varphi - \pi/2)}{\sin \varphi} \right| = \frac{r}{2\sqrt{2}} \left| \frac{\cos(2\varphi)}{\sin \varphi} \right|. \end{aligned}$$

この右辺は、 $r \rightarrow 0$ としても 0 には収束しない。実際 $\varphi = r$ という関係を保って $r \rightarrow 0$ とするとき、

$$|f(x, y) - 0| = \frac{\varphi}{2\sqrt{2}} \cdot \left| \frac{\cos(2\varphi)}{\sin \varphi} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \cos(2\varphi) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

ゆえに $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ は存在しない。



上の3つの例の関数のグラフや等高線を Mathematica で描いてみよう。

```
Clear[f]
f[x_,y_]:=x*y/(x^2+y^2)

g1=Plot3D[f[x,y],{x,-1,1},{y,-1,1}]

g2=ContourPlot[f[x,y],{x,-1,1},{y,-1,1}]

Export["graph_f.png", g1]
```

- Finder でアプリケーションの中を探すと Mathematica が見つかるはず。
- もしもライセンスが切れていたら、池田先生か桂田にアクティベーション・キーを発行してもらおう。

4.6 多変数関数の極限に関する注意 まとめ

$(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のときの $f(x, y)$ の極限を調べる $y = kx$ 作戦

① 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{\substack{y=kx \\ (x,y) \rightarrow (0,0)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx)$ を調査

- その極限が存在しなければ、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ は存在しない。
- その極限が存在する場合、それを A_k とおく。

② A_k が k に依存するならば、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ は存在しない。

③ A_k が実際には k に依存しない、つまり $(\exists A \in \mathbb{R}) (\forall k) A_k = A$ が成り立つならば、次のどちらかが成り立つ。

Ⓐ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = A.$

Ⓑ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ は存在しない。

(a), (b) のどちらであるかを判定するには、 $|f(x, y) - A|$ が 0 に収束するかどうかを判定すれば良い。

(多分、覚えるより、理解した方が楽)

4.6 多変数関数の極限に関する注意 まとめ

次のことを理解しよう。

- $y = kx$ 以外に、問題に応じて $y = kx^2$ とか、色々な曲線を選ぶこともありえる。
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ に比べて、 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} f(x,y)$ は、1変数関数の極限なので格段に計算しやすい。2変数関数は、その関数がどんな関数か分かりにくいことがある。曲線に沿った極限を取るのには、次元を落として計算しやすくする工夫である。
- 最初の $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ を調べるという問題に比べて、具体的に得られた A に対して $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y) - A|$ が 0 であるかどうか調べる、というのは、ある程度簡単になった問題である。

コンピューターがあるならば、グラフを描いてみるのも良いかも。

4.6 多変数関数の極限に関する注意 (おまけ) 0^0

$\Omega := \{(x, y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0\} \setminus \{(0, 0)\}$ (図示すること)

として $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = x^y$$

で定める。 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ は存在しない。実際

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow +0} x^0 = \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} 0^y = \lim_{y \rightarrow +0} 0 = 0$$

であるから。通常 0^0 は定義しないが、それは 0^0 をどう定義しても、この f が $(0, 0)$ で連続にはならないのが嫌だから、ということらしい (明記してある本は見たことないが)。

もっとも、多項式を $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ のように表すために、 x が何であっても $x^0 = 1$ とすることは多い (大抵の場合、断りなく行われる)。微積分でも、Taylor の定理に現れる式

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k$$

は h の多項式であるから、初項の因子 $h^k = h^0$ については、 $h = 0$ のときも 1 であるとして扱う。