数学解析 第 7 回

〜 点列の極限と多変数関数の極限・連続性 (第 1 回) 〜

桂田 祐史

2020 年 6 月 22 日

本日の内容＆連絡事項

- 本日の授業内容
  数列・(1 変数実数値) 関数の極限に引き続き、点列・多変数ベクトル値関数の極限を論じる。つまりは多次元化がテーマとなる。
  多分、簡単に感じると思われる。本日の段階では 1 次元のときと大きな違いはないが、実は…と話が続く。
- 宿題 4 の解説をする (この解説の公開は 6/22(月) 9:50 とします)。
- 本日は宿題はなし。アンケートに答えて下さい。

4 点列の極限と多変数関数の極限・連続性

これまでの数列、1 変数関数の話を多次元化する (これで終わりではなく、無限次元の世界がある)。

「1 次元と同様」で済むところが多いが、そうでないところもある。今日は出て来ないけど、そこに注意が必要である。勉強するときに以下の問いを持っておくと良い「成分ごとにやれば良い？」

4.1 N 次元ベクトルと $\mathbb{R}^N$

ベクトルと数を表す文字を一々区別しないのが普通であるが、この節では書き分けることにする。ベクトルは、太字 $\boldsymbol{x}$ にしたり、矢印をつけて $\vec{x}$ としたり (好きな方を使って良い)。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}.$$

N 次元ベクトルの全体を $\mathbb{R}^N$ で表す。

$$\mathbb{R}^N := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \cdots, x_N \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N$ のとき、断りがなければ、成分は同じ文字に添字をつける:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad (\vec{a} \text{ の第 } i \text{ 成分を } a_i \text{ と表す}).$$

4.1 N 次元ベクトルと $\mathbb{R}^N$　演算

和 (加法), スカラー倍, 内積, 長さ (ノルム) が定義されている。

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_N+b_N \end{pmatrix}, \quad \lambda\vec{a}=\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_N \end{pmatrix},$$

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^T\vec{a}=\sum_{j=1}^{N} a_j b_j,$$

$$|\vec{a}|=\|\vec{a}\|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2\right)^{1/2}.$$

ただし、ベクトルや行列の転置を右上に ^{T} を書いて表すことにする。

加法、スカラー乗法、内積 (スカラー積, ドット積) の性質は良く知っていると思うが、不等式について復習しておく。

$$\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| \le \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|,$$

$$-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \le \left(\vec{a},\vec{b}\right) \le \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|,$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right| \quad (\text{ついでに } \left|\vec{a}-\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|),$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \ge \left|\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|\right|,$$

$$\max_{1\le j\le N}\left|a_j\right| \le \left|\vec{a}\right| \le \sqrt{N}\max_{1\le j\le N}\left|a_j\right|.$$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ に対して

$$B(\vec{a}; r) := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; |\vec{x} - \vec{a}| < r \right\},$$
$$\overline{B}(\vec{a}; r) := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; |\vec{x} - \vec{a}| \leq r \right\}$$

とおき、$B(\vec{a}; r)$ を $\vec{a}$ 中心、半径 r の**開球** (open ball), $\overline{B}(\vec{a}; r)$ を $\vec{a}$ 中心、半径 r の**閉球** (closed ball) と呼ぶ。

4.2 点列とその極限

$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}^N$ への写像 $\vec{a}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^N$ のことを $\mathbb{R}^N$ の**点列** (sequence) と呼び、$\vec{a}(n)$ を $\vec{a}_n$, 点列自身 ($\vec{a}$ のこと) を $\{\vec{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と表す。

定義 (点列の収束)

$\{\vec{a}\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^N$ の点列, $\vec{A} \in \mathbb{R}^N$ とする。$\{\vec{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\vec{A}$ に**収束する** (converges to) とは、

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N' \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N') \quad \left|\vec{a}_n - \vec{A}\right| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このような $\vec{A}$ が存在するとき、それは一意的に定まる。それを点列 $\{\vec{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**極限**と呼び、$\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}_n$ と表す。

極限が存在することを単に**収束する** (convergent) と言ったり、収束しないとき**発散する** (diverges) と言ったりするのは、数列のときと同様である。こういうことは以下断らないことにする。

4.2 点列とその極限 (1) 大体同じ

点列の収束・極限の性質は、数列の収束・極限とほとんど同じである。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\vec{a}_n+\vec{b}_n\right)=\lim_{n\to\infty}\vec{a}_n+\lim_{n\to\infty}\vec{b}_n,\\
&\lim_{n\to\infty}\left(\lambda_n\vec{a}_n\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda_n\lim_{n\to\infty}\vec{a}_n,\\
&\lim_{n\to\infty}\left(\vec{a}_n,\vec{b}_n\right)=\left(\lim_{n\to\infty}\vec{a}_n,\lim_{n\to\infty}\vec{b}_n\right),\\
&\lim_{n\to\infty}\left|\vec{a}_n\right|=\left|\lim_{n\to\infty}\vec{a}_n\right|,\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

証明も同様に出来ることが多い。次の定理を使って数列の場合に帰着出来ることもある。

命題 (点列の収束は成分ごとに考えれば良い)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\vec{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\vec{A}\in\mathbb{R}^N$ に対して

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\lim_{n\to\infty} \vec{a}_n = \vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall j \in \{1,\cdots,N\}) \quad \lim_{n\to\infty} a_{n,j} = A_j.$$

少々形式的かもしれないが

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} a_{n,1} \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} a_{n,N} \end{pmatrix} \qquad \text{(lim がカッコの中に入る).}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\vec{a}_n+\vec{b}_n\right) &= \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots \\ a_{N,n}+b_{N,n}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{1,n}+b_{1,n}\right) \\ \vdots \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{N,n}+b_{N,n}\right)\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_{1,n}+\lim\limits_{n\to\infty} b_{1,n} \\ \vdots \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_{N,n}+\lim\limits_{n\to\infty} b_{N,n}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_{1,n} \\ \vdots \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_{N,n}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} b_{1,n} \\ \vdots \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_{N,n}\end{pmatrix} \\
&= \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{N,n}\end{pmatrix} + \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} b_{1,n} \\ \vdots \\ b_{N,n}\end{pmatrix} \\
&= \lim_{n\to\infty}\vec{a}_n+\lim_{n\to\infty}\vec{b}_n.
\end{aligned}
$$

証明の前に、一般に次の不等式が成り立つことを思い出そう。

$$\max_{1\le j\le N}\left|a_{n,j}-A_j\right| \le \left|\vec{a}_n-\vec{A}\right| \le \sqrt{N}\max_{1\le j\le N}\left|a_{n,j}-A_j\right|.$$

($\Rightarrow$ の証明) $n\to\infty$ のとき $\left|\vec{a}_n-\vec{A}\right|\to 0$ と仮定する。任意の j に対して

$$\left|a_{n,j}-A_j\right|\to 0.$$

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n,j}=A_j$.
($\Leftarrow$ の証明) 任意の j に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n,j}=A_j$ が成り立つと仮定する。ε を任意の正の数とするとき、ある自然数 $m_1,\dots,m_N$ が存在して、

$$n\ge m_j \quad\Rightarrow\quad \left|a_{n,j}-A_j\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}.$$

$N':=\max\{m_1,\cdots,m_N\}$ とおくとき、$N'\in\mathbb{N}$ であり、$n\ge N'$ のとき、

$$\left|\vec{a}_n-\vec{A}\right|\le\sqrt{N}\max_{1\le j\le N}\left|a_{n,j}-A_j\right|\le\sqrt{N}\max_{1\le j\le N}\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}=\varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\vec{a}_n=\vec{A}$. □

例

$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}$ とするとき、

$$\lim_{n\to\infty} \vec{a}_n = \begin{pmatrix} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}.$$

点列の極限は簡単。練習不要。

4.3 $\mathbb{R}^m$ の部分集合の閉包　定義と簡単な例

収束・極限を定義するために、$\mathbb{R}^N$ の部分集合の閉包を定義する。

定義 ($\mathbb{R}^N$ の部分集合の閉包)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とするとき

$$\overline{\Omega} := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; (\forall \varepsilon > 0) B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \right\}$$

で定まる集合 $\overline{\Omega}$ を Ω の**閉包** (the closure of Ω) と呼ぶ。

- $\mathbb{R}$ の区間 I に対して、$\overline{I}$ を定義したが、実はそれは I の閉包である。つまり、区間の閉包は、区間にその端点を合わせたものになる。

$$(\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b) \quad \overline{(a, b)} = \overline{(a, b]} = \overline{[a, b)} = [a, b].$$

- 直観的には、$\overline{\Omega}$ は Ω にその縁(ふち)(数学用語では「**境界**」) を合わせたものである。例えば開球の閉包は閉球である: $\overline{B(\vec{a}; r)} = \overline{B}(\vec{a}; r)$.
- $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

命題 (閉包の性質)

1. 任意の Ω に対して、$\Omega \subset \overline{\Omega}$.
2. $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ならば、$\overline{\Omega_1} \subset \overline{\Omega_2}$.
3. $\overline{\Omega}$ は Ω を含む最小の閉集合である。(これから $\overline{\overline{\Omega}} = \overline{\Omega}$ が分かる。)

証明　(授業ではスキップする。)

1. $\vec{x} \in \Omega$ とすると、任意の正の数 ε に対して、$\vec{x} \in B(\vec{x};\varepsilon) \cap \Omega$ であるから $B(\vec{x};\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset$. ゆえに $\vec{x} \in \overline{\Omega}$. ゆえに $\Omega \subset \overline{\Omega}$.
2. $\Omega_1 \subset \Omega_2$ と仮定する。$\vec{x}$ は Ω_1 の任意の要素とする。任意の正の数 ε に対して、$B(\vec{x};\varepsilon) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. $\Omega_1 \subset \Omega_2$ であるから $B(\vec{x};\varepsilon) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. ゆえに $\vec{x} \in \overline{\Omega_2}$. ゆえに $\overline{\Omega_1} \subset \overline{\Omega_2}$.
3. (まだ閉集合という言葉を定義していないので証明できない。この (3) はフライングである。)

$\square$

例えば、$f(x,y)=x^2-y^2$ は 2 変数の実数値関数である。$\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおくと、$f(x,y)=f(\vec{x})$ と表せる。$f\colon \mathbb{R}^2\ni\vec{x}\mapsto f(\vec{x})\in\mathbb{R}$ という写像とみなせる。

$\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix}x^2-y^2\\2xy\end{pmatrix}$ は 2 変数関数で、値が 2 次元ベクトルである。これは $\vec{f}\colon\mathbb{R}^2\ni\vec{x}\mapsto\vec{f}(\vec{x})\in\mathbb{R}^2$ という写像とみなせる。

より一般に、$n,m\in\mathbb{N}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\Omega\neq\emptyset$ とする。$\vec{f}\colon\Omega\to\mathbb{R}^m$ を n **変数** m **次元ベクトル値関数**と呼ぶ。
特に $n>1$ のとき**多変数関数**と呼ぶ。
特に $m>1$ のとき**ベクトル値関数**と呼ぶ。

n 変数関数とは、$\mathbb{R}^n$ の部分集合を定義域とする関数である。

以下で $\mathbb{R}^n$ という形の式が出て来た時、特に断りなく $n\in\mathbb{N}$ とする。

定義 (多変数関数の収束、極限)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \overline{\Omega}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$ とする。$\vec{x} \to \vec{a}$ のとき $\vec{f}(\vec{x})$ が $\vec{A}$ に**収束する**とは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta) \quad \left| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{A} \right| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。(これを満たす $\vec{A}$ は一意的に定まる。) この $\vec{A}$ を $\vec{x} \to \vec{a}$ のときの $\vec{f}(\vec{x})$ の**極限**と呼び、$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$ で表す。

4.4 多変数関数とその極限

多変数関数の収束・極限の性質は、1 変数実数値関数の収束・極限とほとんど同じである。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\left(\vec{f}(\vec{x})+\vec{g}(\vec{x})\right)=\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{f}(\vec{x})+\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{g}(\vec{x}),\\
&\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\left(\lambda(\vec{x})\vec{f}(\vec{x})\right)=\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\lambda(\vec{x})\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{f}(\vec{x}),\\
&\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\left(\vec{f}(\vec{x}),\vec{g}(\vec{x})\right)=\left(\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{f}(\vec{x}),\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{g}(\vec{x})\right),\\
&\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\left|\vec{f}(\vec{x})\right|=\left|\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{f}(\vec{x})\right|,\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

証明も同様に出来ることが多い。

4.4 多変数関数とその極限

命題 (ベクトル値関数の極限は成分ごとに考えれば良い)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \overline{\Omega}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$ とする。

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall j \in \{1, \cdots, m\}) \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f_j(\vec{x}) = A_j.$$

この定理から、ベクトル値関数の極限は、各成分である実数値関数の極限に帰着される、と言って良い。しかし、まだ $\vec{x} \to \vec{a}$ のところに矢印 $\vec{}$ が残っている。実は、

多変数関数の極限は 1 変数関数の極限には**帰着されない**。

…… これについては次回の授業で説明する。

宿題 4 解説

これは手書きで行う。