

数学解析 第7回

～ 点列の極限と多変数関数の極限・連続性 (第1回) ～

桂田 祐史

2020年6月22日

- 本日の授業内容

数列・(1変数実数値)関数の極限に引き続き、点列・多変数ベクトル値関数の極限を論じる。つまりは**多次元化がテーマ**となる。

多分、簡単を感じると思われる。本日の段階では1次元のときと大きな違いはないが、実は…と話が続く。

本日の内容&連絡事項

- 本日の授業内容

数列・(1変数実数値)関数の極限に引き続き、点列・多変数ベクトル値関数の極限を論じる。つまりは**多次元化がテーマ**となる。

多分、簡単を感じると思われる。本日の段階では1次元のときと大きな違いはないが、実は…と話が続く。

- 宿題4の解説をする (この解説の公開は6/22(月) 9:50 とします)。

本日の内容&連絡事項

- 本日の授業内容

数列・(1変数実数値)関数の極限に引き続き、点列・多変数ベクトル値関数の極限を論じる。つまりは**多次元化がテーマ**となる。

多分、簡単を感じると思われる。本日の段階では1次元のときと大きな違いはないが、実は…と話が続く。

- 宿題4の解説をする (この解説の公開は6/22(月) 9:50 とします)。
- 本日は宿題はなし。アンケートに答えて下さい。

4 点列の極限と多変数関数の極限・連続性

これまでの数列、1変数関数の話を**多次元化する**(これで終わりではなく、無限次元の世界がある)。

「1次元と同様」で済むところが多いが、そうでないところもある。今日は出て来ないけど、そこに注意が必要である。勉強するとき以下の問いを持っておくと良い「成分ごとにやれば良い？」

4.1 N 次元ベクトルと \mathbb{R}^N

ベクトルと数を表す文字を一々区別しないのが普通であるが、この節では書き分けることにする。ベクトルは、太字 \mathbf{x} にしたり、矢印をつけて \vec{x} としたり(好きな方を使って良い)。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

4.1 N 次元ベクトルと \mathbb{R}^N

ベクトルと数を表す文字を一々区別しないのが普通であるが、この節では書き分けることにする。ベクトルは、太字 \mathbf{x} にしたり、矢印をつけて \vec{x} としたり (好きな方を使って良い)。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

N 次元ベクトルの全体を \mathbb{R}^N で表す。

$$\mathbb{R}^N := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.1 N 次元ベクトルと \mathbb{R}^N

ベクトルと数を表す文字を一々区別しないのが普通であるが、この節では書き分けることにする。ベクトルは、太字 \mathbf{x} にしたり、矢印をつけて \vec{x} としたり (好きな方を使って良い)。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

N 次元ベクトルの全体を \mathbb{R}^N で表す。

$$\mathbb{R}^N := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N$ のとき、断りがなければ、成分は同じ文字に添字をつける:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad (\vec{a} \text{ の第 } i \text{ 成分を } a_i \text{ と表す}).$$

4.1 N 次元ベクトルと \mathbb{R}^N 演算

和 (加法), スカラー倍, 内積, 長さ (ノルム) が定義されている。

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_N + b_N \end{pmatrix}, \quad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_N \end{pmatrix},$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b}^T \vec{a} = \sum_{j=1}^N a_j b_j,$$

$$|\vec{a}| = \|\vec{a}\| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \left(\sum_{j=1}^N a_j^2 \right)^{1/2}.$$

ただし、ベクトルや行列の転置を右上に T を書いて表すことにする。

4.1 N 次元ベクトルと \mathbb{R}^N 不等式

加法、スカラー乗法、内積 (スカラー積, ドット積) の性質は良く知っていると思うが、不等式について復習しておく。

$$\left| (\vec{a}, \vec{b}) \right| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|,$$

$$-|\vec{a}| |\vec{b}| \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq |\vec{a}| |\vec{b}|,$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (\text{ついでに } |\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|),$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| \geq \left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right|,$$

$$\max_{1 \leq j \leq N} |a_j| \leq |\vec{a}| \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq j \leq N} |a_j|.$$

4.1 N 次元ベクトルと \mathbb{R}^N 開球と閉球

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ に対して

$$B(\vec{a}; r) := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid |\vec{x} - \vec{a}| < r \right\},$$

$$\bar{B}(\vec{a}; r) := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid |\vec{x} - \vec{a}| \leq r \right\}$$

とおき、 $B(\vec{a}; r)$ を \vec{a} 中心、半径 r の**開球** (open ball), $\bar{B}(\vec{a}; r)$ を \vec{a} 中心、半径 r の**閉球** (closed ball) と呼ぶ。

4.2 点列とその極限

\mathbb{N} から \mathbb{R}^N への写像 $\vec{a}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$ のことを \mathbb{R}^N の点列 (sequence) と呼び、 $\vec{a}(n)$ を \vec{a}_n , 点列自身 (\vec{a} のこと) を $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と表す。

4.2 点列とその極限

\mathbb{N} から \mathbb{R}^N への写像 $\vec{a}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$ のことを \mathbb{R}^N の点列 (sequence) と呼び、 $\vec{a}(n)$ を \vec{a}_n , 点列自身 (\vec{a} のこと) を $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と表す。

定義 (点列の収束)

$\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R}^N の点列, $\vec{A} \in \mathbb{R}^N$ とする。 $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が \vec{A} に収束する (converges to) とは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N' \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N') \quad \left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このような \vec{A} が存在するとき、それは一意的に定まる。それを点列 $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限と呼び、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n$ と表す。

4.2 点列とその極限

\mathbb{N} から \mathbb{R}^N への写像 $\vec{a}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$ のことを \mathbb{R}^N の点列 (sequence) と呼び、 $\vec{a}(n)$ を \vec{a}_n , 点列自身 (\vec{a} のこと) を $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と表す。

定義 (点列の収束)

$\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R}^N の点列, $\vec{A} \in \mathbb{R}^N$ とする。 $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が \vec{A} に収束する (converges to) とは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N' \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N') \quad \left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このような \vec{A} が存在するとき、それは一意的に定まる。それを点列 $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限と呼び、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n$ と表す。

極限が存在することを単に**収束する** (convergent) と言ったり、収束しないとき**発散する** (diverges) と言ったりするのは、数列のときと同様である。こういうことは以下断らないことにする。

4.2 点列とその極限 (1) 大体同じ

点列の収束・極限の性質は、数列の収束・極限とほとんど同じである。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}_n + \vec{b}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n \vec{a}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}_n, \vec{b}_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}_n \right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{a}_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n \right|,$$

...

証明も同様に出来ることが多い。次の定理を使って数列の場合に帰着出来ることもある。

4.2 点列とその極限 (2) 成分ごとに考えればOK

命題 (点列の収束は成分ごとに考えれば良い)

\mathbb{R}^N の点列 $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{A} \iff (\forall j \in \{1, \dots, N\}) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = A_j.$$

4.2 点列とその極限 (2) 成分ごとに考えればOK

命題 (点列の収束は成分ごとに考えれば良い)

\mathbb{R}^N の点列 $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{A} \Leftrightarrow (\forall j \in \{1, \dots, N\}) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = A_j.$$

少々形式的かもしれないが

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,1} \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,N} \end{pmatrix} \quad (\lim \text{ がカッコの中に入る}).$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}_n + \vec{b}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots \\ a_{N,n} + b_{N,n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{1,n} + b_{1,n}) \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{N,n} + b_{N,n}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{1,n} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{1,n} \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{N,n} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{N,n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{1,n} \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{N,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} b_{1,n} \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_{N,n} \end{pmatrix} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{N,n} \end{pmatrix} + \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} b_{1,n} \\ \vdots \\ b_{N,n} \end{pmatrix} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}_n.
\end{aligned}$$

4.2 点列とその極限 (3) 成分ごとに考えればOK 証明

証明の前に、一般に次の不等式が成り立つことを思い出そう。

$$\max_{1 \leq j \leq N} |a_{n,j} - A_j| \leq \left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq j \leq N} |a_{n,j} - A_j|.$$

4.2 点列とその極限 (3) 成分ごとに考えればOK 証明

証明の前に、一般に次の不等式が成り立つことを思い出そう。

$$\max_{1 \leq j \leq N} |a_{n,j} - A_j| \leq \left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq j \leq N} |a_{n,j} - A_j|.$$

(\Rightarrow の証明) $n \rightarrow \infty$ のとき $\left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| \rightarrow 0$ と仮定する。任意の j に対して

$$|a_{n,j} - A_j| \rightarrow 0.$$

すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = A_j$.

4.2 点列とその極限 (3) 成分ごとに考えればOK 証明

証明の前に、一般に次の不等式が成り立つことを思い出そう。

$$\max_{1 \leq j \leq N} |a_{n,j} - A_j| \leq \left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq j \leq N} |a_{n,j} - A_j|.$$

(\Rightarrow の証明) $n \rightarrow \infty$ のとき $\left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| \rightarrow 0$ と仮定する。任意の j に対して

$$|a_{n,j} - A_j| \rightarrow 0.$$

すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = A_j$.

(\Leftarrow の証明) 任意の j に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = A_j$ が成り立つと仮定する。 ε を任意の正の数とするとき、ある自然数 m_1, \dots, m_N が存在して、

$$n \geq m_j \quad \Rightarrow \quad |a_{n,j} - A_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}.$$

$N' := \max\{m_1, \dots, m_N\}$ とおくと、 $N' \in \mathbb{N}$ であり、 $n \geq N'$ のとき、

$$\left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq j \leq N} |a_{n,j} - A_j| \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq j \leq N} \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}} = \varepsilon.$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{A}$.



4.2 点列とその極限 (4) 例

例

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} \\ (1 + \frac{1}{n})^n \end{pmatrix} \text{ とするとき、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}.$$

4.2 点列とその極限 (4) 例

例

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} \\ (1 + \frac{1}{n})^n \end{pmatrix} \text{ とするとき、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}.$$

点列の極限は簡単。練習不要。

4.3 \mathbb{R}^m の部分集合の閉包 定義と簡単な例

収束・極限を定義するために、 \mathbb{R}^N の部分集合の閉包を定義する。

4.3 \mathbb{R}^m の部分集合の閉包 定義と簡単な例

収束・極限を定義するために、 \mathbb{R}^N の部分集合の閉包を定義する。

定義 (\mathbb{R}^N の部分集合の閉包)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とするとき

$$\bar{\Omega} := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid (\forall \varepsilon > 0) B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \right\}$$

で定まる集合 $\bar{\Omega}$ を Ω の閉包 (the closure of Ω) と呼ぶ。

4.3 \mathbb{R}^m の部分集合の閉包 定義と簡単な例

収束・極限を定義するために、 \mathbb{R}^N の部分集合の閉包を定義する。

定義 (\mathbb{R}^N の部分集合の閉包)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とするとき

$$\bar{\Omega} := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid (\forall \varepsilon > 0) B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \right\}$$

で定まる集合 $\bar{\Omega}$ を Ω の閉包 (the closure of Ω) と呼ぶ。

- \mathbb{R} の区間 I に対して、 \bar{I} を定義したが、実はそれは I の閉包である。つまり、区間の閉包は、区間にその端点を合わせたものになる。

$$(\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b) \quad \overline{(a, b)} = \overline{[a, b]} = \overline{[a, b]} = [a, b].$$

4.3 \mathbb{R}^m の部分集合の閉包 定義と簡単な例

収束・極限を定義するために、 \mathbb{R}^N の部分集合の閉包を定義する。

定義 (\mathbb{R}^N の部分集合の閉包)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とするとき

$$\bar{\Omega} := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid (\forall \varepsilon > 0) B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \right\}$$

で定まる集合 $\bar{\Omega}$ を Ω の**閉包** (the closure of Ω) と呼ぶ。

- \mathbb{R} の区間 I に対して、 \bar{I} を定義したが、実はそれは I の閉包である。つまり、区間の閉包は、区間にその端点を合わせたものになる。

$$(\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b) \quad \overline{(a, b)} = \overline{[a, b]} = \overline{[a, b]} = [a, b].$$

- 直観的には、 $\bar{\Omega}$ は Ω にその縁^{ふち}(数学用語では「境界」)を合わせたものである。例えば開球の閉包は閉球である: $\overline{B(\vec{a}; r)} = \overline{B(\vec{a}; r)}$.

4.3 \mathbb{R}^m の部分集合の閉包 定義と簡単な例

収束・極限を定義するために、 \mathbb{R}^N の部分集合の閉包を定義する。

定義 (\mathbb{R}^N の部分集合の閉包)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とするとき

$$\bar{\Omega} := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid (\forall \varepsilon > 0) B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \right\}$$

で定まる集合 $\bar{\Omega}$ を Ω の**閉包** (the closure of Ω) と呼ぶ。

- \mathbb{R} の区間 I に対して、 \bar{I} を定義したが、実はそれは I の閉包である。つまり、区間の閉包は、区間にその端点を合わせたものになる。

$$(\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b) \quad \overline{(a, b)} = \overline{[a, b]} = \overline{[a, b]} = [a, b].$$

- 直観的には、 $\bar{\Omega}$ は Ω にその縁^{ふち}(数学用語では「境界」)を合わせたものである。例えば開球の閉包は閉球である: $\overline{B(\vec{a}; r)} = \overline{B(\vec{a}; r)}$.
- $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

4.3 \mathbb{R}^m の部分集合の閉包 性質

命題 (閉包の性質)

- ① 任意の Ω に対して、 $\Omega \subset \overline{\Omega}$.
- ② $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ならば、 $\overline{\Omega_1} \subset \overline{\Omega_2}$.
- ③ $\overline{\Omega}$ は Ω を含む最小の閉集合である。(これから $\overline{\overline{\Omega}} = \overline{\Omega}$ が分かる。)

命題 (閉包の性質)

- ① 任意の Ω に対して、 $\Omega \subset \overline{\Omega}$.
- ② $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ならば、 $\overline{\Omega_1} \subset \overline{\Omega_2}$.
- ③ $\overline{\Omega}$ は Ω を含む最小の閉集合である。(これから $\overline{\overline{\Omega}} = \overline{\Omega}$ が分かる。)

証明 (授業ではスキップする。)

- ① $\vec{x} \in \Omega$ とすると、任意の正の数 ε に対して、 $\vec{x} \in B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega$ であるから $B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset$. ゆえに $\vec{x} \in \overline{\Omega}$. ゆえに $\Omega \subset \overline{\Omega}$.
- ② $\Omega_1 \subset \Omega_2$ と仮定する。 \vec{x} は Ω_1 の任意の要素とする。任意の正の数 ε に対して、 $B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. $\Omega_1 \subset \Omega_2$ であるから $B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. ゆえに $\vec{x} \in \overline{\Omega_2}$. ゆえに $\overline{\Omega_1} \subset \overline{\Omega_2}$.
- ③ (まだ閉集合という言葉を定義していないので証明できない。この(3)はフライングである。) □

4.4 多変数関数とその極限 定義と基本的な性質

例えば、 $f(x, y) = x^2 - y^2$ は2変数の実数値関数である。 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、 $f(x, y) = f(\vec{x})$ と表せる。 $f: \mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ という写像とみなせる。

4.4 多変数関数とその極限 定義と基本的な性質

例えば、 $f(x, y) = x^2 - y^2$ は2変数の実数値関数である。 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、 $f(x, y) = f(\vec{x})$ と表せる。 $f: \mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ という写像とみなせる。

$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ は2変数関数で、値が2次元ベクトルである。これは $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^2$ という写像とみなせる。

4.4 多変数関数とその極限 定義と基本的な性質

例えば、 $f(x, y) = x^2 - y^2$ は2変数の実数値関数である。 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、 $f(x, y) = f(\vec{x})$ と表せる。 $f: \mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ という写像とみなせる。

$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ は2変数関数で、値が2次元ベクトルである。これは $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^2$ という写像とみなせる。

より一般に、 $n, m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$ とする。 $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ を n 変数 m 次元ベクトル値関数と呼ぶ。

特に $n > 1$ のとき多変数関数と呼ぶ。

特に $m > 1$ のときベクトル値関数と呼ぶ。

4.4 多変数関数とその極限 定義と基本的な性質

例えば、 $f(x, y) = x^2 - y^2$ は2変数の実数値関数である。 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、 $f(x, y) = f(\vec{x})$ と表せる。 $f: \mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ という写像とみなせる。

$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ は2変数関数で、値が2次元ベクトルである。これは $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^2$ という写像とみなせる。

より一般に、 $n, m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$ とする。 $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ を n 変数 m 次元ベクトル値関数と呼ぶ。

特に $n > 1$ のとき多変数関数と呼ぶ。

特に $m > 1$ のときベクトル値関数と呼ぶ。

n 変数関数とは、 \mathbb{R}^n の部分集合を定義域とする関数である。

以下で \mathbb{R}^n という形の式が出て来た時、特に断りなく $n \in \mathbb{N}$ とする。

定義 (多変数関数の収束、極限)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \overline{\Omega}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$ とする。 $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ のとき $\vec{f}(\vec{x})$ が \vec{A} に収束するとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \vec{x} \in \Omega : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta) \quad \left| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{A} \right| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。(これを満たす \vec{A} は一意的に定まる。) この \vec{A} を $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ のときの $\vec{f}(\vec{x})$ の極限と呼び、 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$ で表す。

4.4 多変数関数とその極限

多変数関数の収束・極限の性質は、1変数実数値関数の収束・極限とほとんど同じである。

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x}) \right) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}),$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\lambda(\vec{x}) \vec{f}(\vec{x}) \right) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \lambda(\vec{x}) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}),$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x}) \right) = \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}), \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \right),$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \vec{f}(\vec{x}) \right| = \left| \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \right|,$$

...

証明も同様に出来ることが多い。

4.4 多変数関数とその極限

命題 (ベクトル値関数の極限は成分ごとに考えれば良い)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \bar{\Omega}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$ とする。

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A} \iff (\forall j \in \{1, \dots, m\}) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x}) = A_j.$$

この定理から、ベクトル値関数の極限は、各成分である実数値関数の極限に帰着される、と言って良い。しかし、まだ $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ のところに矢印 $\vec{}$ が残っている。

4.4 多変数関数とその極限

命題 (ベクトル値関数の極限は成分ごとに考えれば良い)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \bar{\Omega}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$ とする。

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A} \Leftrightarrow (\forall j \in \{1, \dots, m\}) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x}) = A_j.$$

この定理から、ベクトル値関数の極限は、各成分である実数値関数の極限に帰着される、と言って良い。しかし、まだ $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ のところに矢印が残っている。実は、

多変数関数の極限は1変数関数の極限には帰着されない。

…… これについては次回の授業で説明する。

宿題 4 解説

これは手書きで行う。