数学解析 第 6 回
～ 関数の極限 (第 2 回) ～

桂田 祐史

2020 年 6 月 15 日

本日の内容&連絡事項

- 本日の授業内容
  - 極限に引き続き、連続関数を定義し、基本的な性質を述べる。
  - 多項式関数、有理関数の連続性を証明する。
  - 連続な関数から組み立てた関数は連続であることを述べる。

  多分、簡単に感じると思います。
- 宿題 3 の解説をする (この解説の公開は 6/15(月) 9:50 とします)。
- 宿題 4 を出す (締め切りや提出方法はいつも通りです)。締め切りから次回授業開始時までの提出を認める (遅れても 1/2 にカウントする)。

  それ以外の連絡事項は特にありません。

3.2 関数の連続性　定義

定義 (連続関数)

I は $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$ とする。

1. $a \in I$ とする。f が a で**連続** *(continuous at a)* であるとは、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つことをいう。
2. f が I で**連続** *(continuous on I)* であるとは、任意の $a \in I$ に対して、f が a で連続であることをいう。

ε-δ 論法で表現すると、

- f が a で連続であるとは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

- f が I で連続であるとは、次の条件が満たされることをいう。

$$(\forall a \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

3.2 関数の連続性　例

極限の例にあげたことから、次のことが分かる。

- 定数関数、1 次関数, $f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ で連続である。
- $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+2}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\})$ は、任意の $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ で連続である。実際、

$$\lim_{x \to a}(3x+4) = 3a+4, \quad \lim_{x \to a}(x+2) = a+2 \neq 0$$

であり、「$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = A,\ \lim_{x \to a} g(x) = B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$」を用いて、

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{3x+4}{x+2} = \frac{3a+4}{a+2} = f(a).$$

同様にして連続性が示せる場合が多い。次項で一般化しよう。

3.3 “多項式関数”, 有理関数は連続 (1)

多項式 (polynomial)

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\};\ a_j \in \mathbb{R})$$

の形の式を、x の実係数**多項式**と呼ぶ。(高校数学での整式。大学では、1 項のみでも多項式と呼ぶ。) x の実係数多項式全体を $\mathbb{R}[x]$ で表す。例として

$$0, 1, \pi, x+2, \pi x^3 + ex^2 + \log 2 \in \mathbb{R}[x],$$

$$\frac{3x+4}{x+2}, x^{-2}, \sqrt{x}, \sin x \notin \mathbb{R}[x].$$

有理式 (rational expression)

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \quad (P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x],\ P(x) \text{ は定数 } 0 \text{ ではない})$$

の形の式を、x の実係数**有理式**と呼ぶ。要するに、有理式 $= \dfrac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$. x の実係数有理式全体を $\mathbb{R}(x)$ で表す。多項式は有理式である: $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{R}(x)$.

$$0, 1, \pi, x+2, \pi x^3 + ex^2 + \log 2, \frac{3x+4}{x+2}, x^{-2} \in \mathbb{R}(x),$$

$$\sqrt{x}, \sin x \notin \mathbb{R}(x).$$

3.3 “多項式関数”, 有理関数は連続 (2)

多項式、有理式から “自然に” 関数を定め、“多項式関数”, 有理関数と呼ぶ。定義域は特に断りのない限り、式が意味を持つような実数全体の集合とする。つまり

- $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ のとき、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = P(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める。
- $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ $(P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x],\ P(x)$ は定数 0 ではない$)$ のとき、$g\colon I \to \mathbb{R}$ を $g(x) = R(x)$ $(x \in I)$ で定める。ただし

$$I := \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \neq 0\} \quad (\text{分母が 0 にならない点の全体}).$$

細かい注意

- 式と関数を区別している。しかし普通は f を P, g を R と書く。
- “多項式関数” はここだけの用語。多項式の定める関数を表す一般的に使われている日本語の用語はない。英語だと polynomial function は普通の言葉なのに…
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \neq 0\}$ は区間でないことが多い。

3.3 "多項式関数", 有理関数は連続 (3)

定理 (多項式関数、有理関数は連続)

(1) 多項式関数は $\mathbb{R}$ 全体で連続である。*(2)* 有理関数は *(*$\mathbb{R}$ から、分母が 0 になる点を除いた集合を定義域として*)* 連続である。

補題

(1) 定数関数 $f(x) = c$ *(*$x \in \mathbb{R}$*)* は $\mathbb{R}$ で連続である。*(2)* $f(x) = x$ *(*$x \in \mathbb{R}$*)* は $\mathbb{R}$ で連続である。

(証明)　実質的にすでに済ませてある。任意の正の数 ε に対して、(1) は $\delta := 1$, (2) は $\delta := \varepsilon$ と δ を決めれば良かった。 $\square$

補題 (連続関数の和・差・積・商)

I は $\mathbb{R}$ の区間、$a \in I$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$. f と g は a で連続ならば、$f+g$, $f-g$, fg も a で連続である。さらに $g(a) \neq 0$ ならば、$\dfrac{f}{g}$ も a で連続である。

3.3 “多項式関数”, 有理関数は連続 (4)

定理の証明のあらすじ

多項式関数は、定数関数と $f(x)=x$ から、積と和を取ることを有限回繰り返すことで得られるから、連続である。

(もう少し詳しくやると: 「連続関数の積は連続である」から、任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して、$f(x)=x^k$ が $\mathbb{R}$ で連続であることが帰納法で証明出来る。定数関数は連続であるから、任意の実数 a_{n-k} に対して、$f(x)=a_{n-k}x^k$ も $\mathbb{R}$ で連続である。ゆえに

$$(\star)\qquad f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

は、$n+1$ 個の連続関数の和であるから連続である。)

有理関数 f に対して、$P(x),Q(x)\in\mathbb{R}[x]$, $P(x)\neq 0$ (定数 0 でない) が存在して、$f(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ $(x\in I:=\{x\in\mathbb{R}\mid P(x)\neq 0\})$. の形をしている。任意の $a\in I$ に対して、多項式関数は $\mathbb{R}$ 全体で連続であることから $\lim_{x\to a}P(x)=P(a)$, $\lim_{x\to a}Q(x)=Q(a)$. 補題 2 から、

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{Q(a)}{P(a)}=f(a).$$

3.3 “多項式関数”, 有理関数は連続 (5)

　このように基本的な関数から「組み立てた」関数について何か条件が成り立つことを証明するために、

1. 基本的な関数は条件を満たす
2. 条件を満たす関数から組み立てた関数は条件を満たすことを確認する

というやり方はあちこちで良く出て来る (微分可能性や、C^k 級であることの証明など)。

3.4 合成関数の極限と連続性 (1) 定義と極限・連続性

I と J は $\mathbb{R}$ の区間で、$f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$ のとき、$g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ を

$$g \circ f(x) := g\left(f(x)\right) \quad (x \in I)$$

で定め、f と g の**合成** (composition)、あるいは f と g の**合成関数** (composite function) と呼ぶ。

命題 (合成関数の極限)

I と J は $\mathbb{R}$ の区間で、$f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $f(I) \subset J$, $b \in \overline{J}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$, $\lim_{y\to b} g(y) = c$ が成り立つならば、$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$.

(次のスライドで証明する。)

系 (連続関数の合成関数は連続)

連続関数の合成関数は連続である。

3.4 合成関数の極限と連続性 (2) 証明

(図を描いて、ゆっくり説明すること。) ε を任意の正の数とする。
$\displaystyle\lim_{y\to b} g(y) = c$ より、ある正の数 δ_1 が存在して、

$$(\forall y \in J : |y-b| < \delta_1) \quad |g(y)-c| < \varepsilon.$$

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b$ より、ある正の数 δ が存在して、

$$(\forall x \in I : |x-a| < \delta) \quad |f(x)-b| < \delta_1.$$

このとき、$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して、$f(x) \in J$, $|f(x)-b| < \delta_1$ であるから、

$$|g(f(x)) - c| < \varepsilon.$$

これは $\displaystyle\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$ を示している。 □

余談: 極限の定義

細かい話だし、興味がない人はスルーして構わない。

実は、この講義における極限の定義は、多くのテキストの極限の定義とは異なっている (この講義での定義は、有名な杉浦 [1] の定義と同じ)。

普通、$f(x) \to A$ $(x \to a)$ は

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : 0 < |x - a| < \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

が満たされることと定義されるが、この講義では $0 <$ という条件は課していない。

どちらの定義でも、微積分で重要な微分可能性や連続性に違いはない。

比較的大きな違いは、合成関数の極限についての定理に現れる。多くのテキストにおいて、連続関数の合成関数が連続という定理は載っているが、合成関数の極限についての定理は載っていない。なぜだろうと思って、調べているうちに、この定義の問題に気がついた。私は大抵は多数派に与することにしているけれど、この件に関しては杉浦先生に賛成する。

今日のまとめ

連続関数から、和、差、積、商、合成をすることで「組み合わせて作った」関数は連続である。

高校数学や大学 1 年次の微積分で学ぶ初等関数は、定義域全体で連続である。

$\sqrt{}$, sin, cos, log, a^x, log, x^n ($n \in \mathbb{Z}$, 定義域は $n \geq 0$ のとき $\mathbb{R}$, $n < 0$ のとき $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), x^α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x \in (0, \infty)$) などの連続性は (この講義では) 認めることにする。多くは Taylor 展開で定義し直せるので、それを認めると明らかである。

注意　初等関数を Taylor 展開を用いずに定義するのは意外に手間がかかる。そのため連続性の証明とともに省略されることが多い。この講義でも (残念ながら) 省略する。

宿題 3 解説

これは手書きで行う。

参考文献

杉浦 光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会 (1980).
MIND からは

https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843

でアクセス可能である。p. 52 に極限の定義が載っている。