# 数学解析 第 4 回

## ～ 数列の極限 (第 2 回) ～

桂田 祐史

2020 年 6 月 1 日

# 連絡事項&本日の内容

- 対面形式の期末試験は実施しないことが決定した。
  成績評価の方法を次のように変更する。
  　【成績評価の方法】
  宿題 *40* %，期末レポート *60* %とし，得点の成績評価への換算には大学の基準に従う *(60* 点以上が合格*)*。
- 本日の授業内容
  - 2 章「数列の極限」の 2 回目。
  - 問 2 の解説を行う。
  - 宿題 3 を出す。締め切りは 6 月 6 日 (土曜)18:00 とする。ネットワークやサーバーの障害などの問題が発生しない限り、宿題 3 の解説は次回授業で行う (それ以降の宿題提出は認めない)。
- 前回「宿題を出す日はアンケートは行わない」と言ったが、今週は大学から「オンライン授業に関する学生アンケート」を行うよう指示があった。回答期限は 6 月 8 日 (月) 9:00 である。

# 2.3 極限の性質 (続き) 証明を書く順番と考える順番

$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n b_b) = ab$ の証明の予備的考察

**証明は論理的な順番に書く。しかし証明を考えるときはそうではない。**

今回は、むしろ最後のあたりから考える。

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \le |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\
&= |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|.
\end{aligned}
$$

右辺の 2 項をそれぞれ $\dfrac{\varepsilon}{2}$ で抑えれば良いだろう。青部分は小さいはず。

- $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$ とすれば良い？$b = 0$ のときは？工夫が要る。
- $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2|a_n|}$ とすれば良い？$a_n$ が 0 にならなかったとしても、実はダメ。右辺に $n$ が残っているとうまく行かない (☆)。

以下に紹介する「収束列は有界」という定理が ☆ の解決に役立つ。

# 2.3 極限の性質 (続き) 数列の有界性

$\mathbb{R}$ の部分集合の有界性を定義済み。数列や関数にも有界性がある。

## 定義 (数列が上に有界, 下に有界, 有界)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は実数列とする。

1. $\{a_n\}$ が**上に有界とは**、$\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ が上に有界なことをいう。
2. $\{a_n\}$ が**下に有界とは**、$\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ が下に有界なことをいう。
3. $\{a_n\}$ が**有界とは**、$\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ が有界なことをいう。
   すなわち $(\exists R\in\mathbb{R})\ (\forall n\in\mathbb{N})\ |a_n|\le R$ が成り立つこと。

Cf. $A\subset\mathbb{R}$ とするとき、$A$ が有界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists R\in\mathbb{R})\ (\forall x\in A)\ |x|\le R$.

(細かい注意) 実は数列を $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数とみなすと、関数としての有界性は、上で定義した数列の有界性と一致する。

# 2.3 極限の性質 (続き) 収束列は有界

## 命題 (収束列は有界)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束列ならば、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。

## Proof.

$\{a_n\}$ が収束列であるので、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ゆえにある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < 1.$$

(数列の収束の条件の $\varepsilon$ として、1 を選んだ。)

$$R := \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n| \leq R$ が成り立つ。実際 $n < N$ のとき (定義からすぐ) $|a_n| \leq R$ であり、$n \geq N$ のとき

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq R.$$

□

# 2.3 極限の性質 (続き) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$ の証明

$\{a_n\}$ は収束列であるから、ある実数 $R$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |a_n| \le R.$$

$\varepsilon$ を任意の正の数とする。$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるから、ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\sharp) \qquad (\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N_1) \quad |a_n - a| \le \frac{\varepsilon}{2\left(|b| + 1\right)}.$$

$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ であるから、ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\flat) \qquad (\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N_2) \quad |b_n - b| \le \frac{\varepsilon}{2\left(R + 1\right)}.$$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n \ge N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$(\sharp)$, $(\flat)$ が成り立つので、

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \le |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\
&= |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| \le R\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| \\
&\le R \cdot \frac{\varepsilon}{2\left(R + 1\right)} + \frac{\varepsilon}{2\left(|b| + 1\right)} \cdot |b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$. □

# 証明の振り返り (気になる人向け, p. 3 の問題の解決)

- $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$ とすると、$b = 0$ のとき困る。それを避けるため、上の証明では $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ とした。すると

$$|b|\,|a_n - a| < |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2\,(|b|+1)} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|b|}{|b|+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

0 以上の任意の数 $r$ に対して、$\dfrac{r}{r+1} < 1$ が成り立つことに注意。
(別法: $b = 0$ と $b \neq 0$ で場合分けして処理するという方法もある。$b \neq 0$ のときは $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$ として良いし、$b = 0$ のときは $|b|\,|a_n - a| = 0$ であるから $|b|\,|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ は無条件に成り立つ。)

- p. 3 ☆ の解決法。$\{a_n\}$ の有界性を使って $|a_n| \le R$ と抑えて

$$|a_n|\,|b_n - n| \le R\,|b_n - b|$$

と評価しておいて、$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(R+1)}$ を目標としている。この右辺は $n$ に依らない正の数であるから、収束の定義の条件の $\varepsilon$ に出来る。

# 2.3 極限の性質 (続き) 絶対値の連続性

## 命題 (絶対値の連続性)

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば、 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

一般に次の不等式が成り立つ。

$$\big||a| - |b|\big| \le |a - b| \tag{1}$$

この証明は各自考えてもらう (この PDF の最後につける)。これを使えば簡単。

## Proof.

$\varepsilon$ を任意の正の数とする。 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるから、ある自然数 $N$ が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

このとき、

$$\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a| < \varepsilon.$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. □

# 細かい注意　なぜ絶対値の連続性というか

(初めはここはスキップしても良い。)

$f(x) := |x|$ とおくと、上の定理は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$$

と書ける。後で学ぶ関数の連続性について学ぶが、これは $f$ が連続であることを意味する。つまり上の定理は、実数にその絶対値を対応させる関数が連続である、という内容である。

# 2.3 極限の性質　順序の保存

**命題** ( $a_n \le b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$)

実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がそれぞれ $a, b$ に収束し、また $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \le b_n$ が成り立つならば、$a \le b$.

**Proof.**

背理法を用いる。$a > b$ と仮定すると、$a - b > 0$. $\varepsilon := \frac{a-b}{3}$ とおくと、$\varepsilon > 0$. 十分大きな $n$ に対して $|a_n - a| < \varepsilon$ かつ $|b_n - b| < \varepsilon$. このとき

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \land -\varepsilon < b_n - b < \varepsilon.$$

ゆえに

$$a_n > a - \varepsilon = (b + 3\varepsilon) - \varepsilon = b + 2\varepsilon > b_n + \varepsilon > b_n.$$

これは矛盾である。ゆえに $a \le b$. □

**注意** (仮定を真不等号にしても結果は真不等号にならない)　$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n < b_n$ が成り立つとき、つねに $a \le b$ は成り立つが、$a < b$ は必ずしも成り立たない。例えば $a_n := 1 - \frac{1}{n}$, $b_n := 1 + \frac{1}{n}$ のとき、$a_n < b_n\ (n \in \mathbb{N})$ であるが $a = b = 1$.

# 2.3 極限の性質　はさみうちの原理

**命題 (はさみうちの原理)**

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq b_n \leq c_n$$

を満たし、$\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ が $A \in \mathbb{R}$ に収束するならば

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

この証明は比較的簡単なので省略する (本日の宿題)。

# ここまでの振り返りと、これからの議論の大事なところ

§2.3 までは、定理の仮定の中に数列が収束するという条件あり、その極限が結論部分にも登場した。

一方、極限の存在を仮定せず、他の条件から**極限の存在を導く**定理があり、これからいくつか紹介する。**非常に重要である。**

極限の存在を保証するための要点は、**実数の連続性** (我々の場合は Weierstrass) の上限公理である。

# 2.4 上に有界な単調増加数列は (上限に) 収束する

## 命題 (上に有界な単調増加数列は (上限に) 収束する)

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\textit{(1)}\ (\exists U\in\mathbb{R})\ (\forall n\in\mathbb{N})\ \ a_n\le U \qquad \textit{(2)}\ (\forall n\in\mathbb{N})\ a_n\le a_{n+1}$$

を満たすならば

$$(\exists a\in\mathbb{R})\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

実は $a$ は $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ の上限である。

## Proof.

$\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ が上に有界であるから、上限 $S$ が存在する ($\because$ 上限公理)。

$$\text{(i)}\ (\forall n\in\mathbb{N})\quad a_n\le S. \qquad \text{(ii)}\ (\forall\varepsilon>0)\ (\exists N\in\mathbb{N})\quad S-\varepsilon<a_N.$$

このとき $n\ge N$ を満たす任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$S-\varepsilon<a_N\le a_n\le S$$

であるから $-\varepsilon<a_n-S\le 0$. ゆえに $|a_n-S|<\varepsilon$. これは $\lim_{n\to\infty} a_n = S$ を意味する。ゆえに $a:=S$ とすれば良い。 □

# 2.4 上に有界な単調増加数列は(上限に)収束する

上の定理を使うのは割と簡単、応用たくさん、というのを納得してもらいたい。

**例**　$x^2 = 3$ を満たす正の数 $x$ (つまりは $\sqrt{3}$) の存在を示したい。

$\sqrt{3}$ を素朴に、1 桁ずつ求めていく手順を考える。

$1.7^2 \le 3 < 1.8^2$ である。$a_1 := 1.7$ とおく。
$1.73^2 \le 3 < 1.74^2$ である。$a_2 := 1.73$ とおく。
$1.732^2 \le 3 < 1.733^2$ である。$a_3 := 1.732$ とおく。
$1.7320^2 \le 3 < 1.7321^2$ である。$a_4 := 1.7320$ とおく。

以下順にすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n$ が定義できる。(直感的には、小数点以下第 $n$ 位まで "求めた" 数。)

$\{a_n\}$ は上に有界 (上界として 1.8 が取れる) であり、単調増加であるから、$\{a_n\}$ は収束する。$x := \lim_{n\to\infty} a_n$ とおく。

$$a_n^2 \le 3 < \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$$

に注意すると $x^2 = 3$ を満たすことが分かる (なぜでしょう…この PDF の最後に載せておく)。 □

# 2.4 上に有界な単調増加数列は (上限に) 収束する

**例** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ (つまり自然対数の底 $e$) の存在を示そう。これは

$$s_n := \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

で定義される $\{s_n\}$ が収束するということである。

$$\begin{aligned}s_n &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\ &= 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} \leq 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/2} = 3\end{aligned}$$

であるから $\{s_n\}$ は上に有界である。一方、

$$s_{n+1}-s_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

であるから $\{s_n\}$ は単調増加数列である。ゆえに $\{s_n\}$ は収束する。 □

# 問3紹介

問題文は

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi3.pdf`

締め切りは 6 月 6 日 (土) 18:00. 提出は Oh-o! Meiji のレポート・システムを使う。

**注意**　ネットワークやシステム障害などが起きない限り、次回授業動画で解答を説明する。動画は 6 月 7 日 (日)18 時過ぎに公開予定。それ以後の宿題提出は受け付けない。

# 問 2 解説

これは書きながら説明する。

# $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ の１つの証明

**証明**　三角不等式から

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

であるから

$$(\sharp) \qquad |a| - |b| \leq |a - b| \,.$$

$a$ と $b$ を入れ替えると

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b| \,.$$

$-1$ をかけて

$$(\flat) \qquad |a| - |b| \geq -|a - b| \,.$$

$(\sharp)$ と $(\flat)$ をまとめると

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b| \,.$$

これは $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ と同値である。 □

# p. 18 の極限 $x$ が $x^2 = 3$ を満たすこと

(きちんとやるのは、それなりに手間がかかる。気になる人向け。)

$$(\heartsuit) \qquad a_n^2 \le 3 < \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$$

から $x := \lim_{n\to\infty} a_n$ が $x^2 = 3$ を満たすことを導こう。まず

$$0 < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}$$

と挟み撃ちの原理から $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$. ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right) = x.$$

ゆえに不等式 ($\heartsuit$) の左辺、右辺の極限は

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 = x^2, \quad \lim_{n\to\infty} \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)\right)^2 = x^2.$$

順序が保存されることから

$$x^2 \le 3 \le x^2.$$

これから $x^2 = 3$.