数学解析 第 2 回

～ 実数の性質 (第 2 回) ～

桂田 祐史

2020 年 5 月 18 日

復習ってどうやるの (1)

前回、次のように言った。

- 復習がお勧め
- 具体的にはノート等を読み返し理解できるか**自己チェックする**
  (特に新しい言葉・記号、定理などを頭に入れた状態で次の授業にのぞめるように)

復習ってどうやるの (1)

前回、次のように言った。

- 復習がお勧め
- 具体的にはノート等を読み返し理解できるか**自己チェックする**
  (特に新しい言葉・記号、定理などを頭に入れた状態で次の授業にのぞめるように)

復習しましたか？

復習ってどうやるの (1)

前回、次のように言った。

- 復習がお勧め
- 具体的にはノート等を読み返し理解できるか**自己チェックする** (特に新しい言葉・記号、定理などを頭に入れた状態で次の授業にのぞめるように)

復習しましたか？

ちょっとやってみましょう (最初だから)。

復習ってどうやるの (1)

前回、次のように言った。

- 復習がお勧め
- 具体的にはノート等を読み返し理解できるか**自己チェックする**
  (特に新しい言葉・記号、定理などを頭に入れた状態で次の授業にのぞめるように)

復習しましたか？

ちょっとやってみましょう (最初だから)。

問「前回の授業で出て来た新しい言葉・記号にはどんなものがあったか？」

復習ってどうやるの (1)

前回、次のように言った。

- 復習がお勧め
- 具体的にはノート等を読み返し理解できるか**自己チェックする** (特に新しい言葉・記号、定理などを頭に入れた状態で次の授業にのぞめるように)

復習しましたか？

ちょっとやってみましょう (最初だから)。

問「前回の授業で出て来た新しい言葉・記号にはどんなものがあったか？」

「Weierstrass の上限公理」、「上界」、「上に有界」、「上限」などがあった (新しくはないけれど「最大値」の定義も出てきました)。

復習ってどうやるの (1)

前回、次のように言った。

- 復習がお勧め
- 具体的にはノート等を読み返し理解できるか**自己チェックする** (特に新しい言葉・記号、定理などを頭に入れた状態で次の授業にのぞめるように)

復習しましたか？

ちょっとやってみましょう (最初だから)。

問「前回の授業で出て来た新しい言葉・記号にはどんなものがあったか？」

「Weierstrass の上限公理」、「上界」、「上に有界」、「上限」などがあった (新しくはないけれど「最大値」の定義も出てきました)。

これらの言葉の定義が書けるでしょうか？例が挙げられるでしょうか？

復習ってどうやるの (2)

最初は少し手助けする。

問「$A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。U が A の上界とは？」

復習ってどうやるの (2)

最初は少し手助けする。

問「$A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。U が A の上界とは？」
答: $(\forall x \in A) \quad x \leq U$ (が成り立つこと).

　青字の部分も自分で書けるようにしよう。

問「上に有界の定義を述べよ。」

復習ってどうやるの (2)

最初は少し手助けする。

問「$A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。U が A の上界とは？」
答: $(\forall x \in A) \quad x \leq U$ (が成り立つこと).

　青字の部分も自分で書けるようにしよう。

問「上に有界の定義を述べよ。」

答「$A \subset \mathbb{R}$ とする。A が上に有界とは

$$(\exists U \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \leq U$$

が成り立つことをいう。」　　(つまり A の上界が存在すること)

復習ってどうやるの (2)

最初は少し手助けする。

問「$A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。U が A の上界とは？」
答: $(\forall x \in A) \quad x \le U$ (が成り立つこと).

　青字の部分も自分で書けるようにしよう。

問「上に有界の定義を述べよ。」

答「$A \subset \mathbb{R}$ とする。A が上に有界とは

$$(\exists U \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \le U$$

が成り立つことをいう。」　(つまり A の上界が存在すること)

次は何を問うべきでしょう？

復習ってどうやるの (2)

最初は少し手助けする。

問「$A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。U が A の上界とは？」
答: $(\forall x \in A) \quad x \leq U$ (が成り立つこと).

　青字の部分も自分で書けるようにしよう。

問「上に有界の定義を述べよ。」

答「$A \subset \mathbb{R}$ とする。A が上に有界とは

$$(\exists U \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \leq U$$

が成り立つことをいう。」　(つまり A の上界が存在すること)

次は何を問うべきでしょう？

答「上限の定義を述べよ。」または「上界」、「上に有界」の例をあげること。さらに「Weierstrass の上限公理を述べよ。」　やって下さい。

今日すること

一口に言えば

今日すること

一口に言えば

上限についての基本的な命題を証明する

今日すること

一口に言えば

上限についての基本的な命題を証明する

(ある具体的な集合の上限が何であるか示すことも含む。

例えば「$A = [1, 3) = \{x \mid 1 \le x < 3\}$ の上限は 3」)

今日すること

一口に言えば

上限についての基本的な命題を証明する

(ある具体的な集合の上限が何であるか示すことも含む。

例えば「$A = [1, 3) = \{x \mid 1 \leq x < 3\}$ の上限は 3」)

- 話の基礎となる重要な定理: **Weierstrass の上限公理**
- **定義と定理にもとづき話を進める**、というだけのこと。

今日すること

一口に言えば

上限についての基本的な命題を証明する

(ある具体的な集合の上限が何であるか示すことも含む。

例えば「$A = [1, 3) = \{x \mid 1 \le x < 3\}$ の上限は 3」)

- 話の基礎となる重要な定理: **Weierstrass の上限公理**
- **定義と定理にもとづき話を進める**、というだけのこと。
- 命題の証明がすべてこんなふうに出来るわけではないが、こういうものが結構多く、それが出来ることは重要である。

今日すること

一口に言えば

上限についての基本的な命題を証明する

(ある具体的な集合の上限が何であるか示すことも含む。

例えば「$A = [1,3) = \{x \mid 1 \le x < 3\}$ の上限は 3」)

- 話の基礎となる重要な定理: **Weierstrass の上限公理**
- **定義と定理にもとづき話を進める**、というだけのこと。
- 命題の証明がすべてこんなふうに出来るわけではないが、こういうものが結構多く、それが出来ることは重要である。
- **「証明してください」に対してフリーズしない**ようになってくれたら嬉しい。

今日すること

一口に言えば

上限についての基本的な命題を証明する

(ある具体的な集合の上限が何であるか示すことも含む。

例えば「$A = [1, 3) = \{x \mid 1 \le x < 3\}$ の上限は 3」)

- 話の基礎となる重要な定理: **Weierstrass の上限公理**
- **定義と定理にもとづき話を進める**、というだけのこと。
- 命題の証明がすべてこんなふうに出来るわけではないが、こういうものが結構多く、それが出来ることは重要である。
- **「証明してください」に対してフリーズしない**ようになってくれたら嬉しい。(出て来る言葉の定義は何か、関係しそうな定理はどんなものか、思い出そう…それは復習して下さいと言った内容。)

そろそろ今日の講義に入る。その前にもう一つ復習。

(以下の 2 つ、まだ自分で書いていなければ、ここで書こう)

定義 (上限)

$A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ とする。S が A の**上限** *(supremum)* であるとは、次の *(i)* と *(ii)* が成り立つことをいう。

(i)

$$(\forall x \in A) \quad x \le S.$$

(つまり S は A の上界である。)

(ii)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) \quad S - \varepsilon < x.$$

(つまり S より小さい数はどれでも A の上界ではない。)

定理 (Weierstrass の上限公理)

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする。A が上に有界ならば、A の上限が存在する。

1.3 (続き) 上限の例

例

$A = (-\infty, 3)$, $S = 3$ とするとき、S は A の上限である。

1.3 (続き) 上限の例

S が A の上限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ (i) $(\forall x \in A)\ x \leq S$. (ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ S - \varepsilon < x$.

例

$A = (-\infty, 3)$, $S = 3$ とするとき、S は A の上限である。

1.3 (続き) 上限の例

S が A の上限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ (i) $(\forall x \in A)\ x \leq S$. (ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ S - \varepsilon < x$.

例

$A = (-\infty, 3)$, $S = 3$ とするとき、S は A の上限である。

(i) x を A の任意の要素とすると、A の定義から $x < 3$. ゆえに $x \leq S$.

1.3 (続き) 上限の例

S が A の上限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ (i) $(\forall x \in A)\ x \le S$. (ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ S - \varepsilon < x$.

例

$A = (-\infty, 3)$, $S = 3$ とするとき、S は A の上限である。

(i) x を A の任意の要素とすると、A の定義から $x < 3$. ゆえに $x \le S$.

(ii) ε を任意の正の数とする。$x := 3 - \frac{\varepsilon}{2}$ とおくと、$x < 3$ であるから $x \in A$. また $S - \varepsilon = 3 - \varepsilon < 3 - \frac{\varepsilon}{2} = x$ であるから $S - \varepsilon < x$.
(i), *(ii)* より、S は A の上限である。 $\square$

1.3 (続き) 上限の例 (もう一つ)

例 (上の例とほとんど同じだけれど、少し手間が多い)

$A = [1, 3)$, $S = 3$ とするとき、S は A の上限である。

例 (上の例とほとんど同じだけれど、少し手間が多い)

$A = [1, 3)$, $S = 3$ とするとき、S は A の上限である。

証明

(i) (これは上とほぼ同じにできる。やってみよう。)

1.3 (続き) 上限の例 (もう一つ)

例 (上の例とほとんど同じだけれど、少し手間が多い)

$A = [1, 3)$, $S = 3$ とするとき、S は A の上限である。

証明

(i) x を A の任意の要素とすると、A の定義から $1 \le x < 3$. ゆえに $x \le S$.

(ii) 前と同様にやると…

例 (上の例とほとんど同じだけれど、少し手間が多い)

$A = [1, 3)$, $S = 3$ とするとき、S は A の上限である。

証明

(i) x を A の任意の要素とすると、A の定義から $1 \le x < 3$. ゆえに $x \le S$.

(ii) ε を任意の正の数とする。$x := 2 - \frac{\varepsilon}{2}$ とおく。$S - \varepsilon < x$ であるが、$x \in A$ とは限らない！ε が大きいと、$x < 1$ となってしまう！

1.3 (続き) 上限の例 (もう一つ)

例 (上の例とほとんど同じだけれど、少し手間が多い)

$A = [1,3)$, $S = 3$ とするとき、S は A の上限である。

証明

(i) x を A の任意の要素とすると、A の定義から $1 \le x < 3$. ゆえに $x \le S$.
(ii) ε を任意の正の数とする。$x := \max\{3 - \frac{\varepsilon}{2}, 1\}$ とおく。
$S - \varepsilon = 3 - \varepsilon < 3 - \frac{\varepsilon}{2} \le x$ より $S - \varepsilon < x$. また $1 \le x < 3$ より $x \in A$.

例 (上の例とほとんど同じだけれど、少し手間が多い)

$A = [1, 3)$, $S = 3$ とするとき、S は A の上限である。

証明

(i) x を A の任意の要素とすると、A の定義から $1 \leq x < 3$. ゆえに $x \leq S$.
(ii) ε を任意の正の数とする。$x := \max\{3 - \frac{\varepsilon}{2}, 1\}$ とおく。
$S - \varepsilon = 3 - \varepsilon < 3 - \frac{\varepsilon}{2} \leq x$ より $S - \varepsilon < x$. また $1 \leq x < 3$ より $x \in A$.
(i), (ii) より、S は A の上限である。 □

1.3 (続き) 上限の例 (もう一つ)

例 (上の例とほとんど同じだけれど、少し手間が多い)

$A = [1, 3)$, $S = 3$ とするとき、S は A の上限である。

証明

(i) x を A の任意の要素とすると、A の定義から $1 \le x < 3$. ゆえに $x \le S$.
(ii) ε を任意の正の数とする。$x := \max\{3 - \frac{\varepsilon}{2}, 1\}$ とおく。
$S - \varepsilon = 3 - \varepsilon < 3 - \frac{\varepsilon}{2} \le x$ より $S - \varepsilon < x$. また $1 \le x < 3$ より $x \in A$.
(i), (ii) より、S は A の上限である。 □

(別証) (ii) で ε の大きさで場合わけするという方法もある。$\varepsilon < 1$ ならば $x := 3 - \frac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon \ge 1$ ならば $x := \frac{5}{2}$ とおく等。

簡単な定理をいくつか。

命題

上限は上界である。すなわち $A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$, S が A の上限ならば、S は A の上界である。

簡単な定理をいくつか。

命題

上限は上界である。すなわち $A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$, S が A の上限ならば、S は A の上界である。

証明　S が A の上限であれば、定義の条件の (i) $(\forall x \in A)\ x \leq S$ が成り立つ。これは S が A の上界であることを意味する。 □

簡単な定理をいくつか。

命題

上限は上界である。すなわち $A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$, S が A の上限ならば、S は A の上界である。

証明　S が A の上限であれば、定義の条件の (i) $(\forall x \in A)\ x \leq S$ が成り立つ。これは S が A の上界であることを意味する。 □

命題

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とするとき、A が上に有界 $\Leftrightarrow$ A の上限が存在する。

簡単な定理をいくつか。

命題

上限は上界である。すなわち $A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$, S が A の上限ならば、S は A の上界である。

証明　S が A の上限であれば、定義の条件の (i) $(\forall x \in A)\ x \le S$ が成り立つ。これは S が A の上界であることを意味する。 □

命題

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とするとき、A が上に有界 $\Leftrightarrow$ A の上限が存在する。

証明　($\Rightarrow$) これは Weierstrass の上限公理という定理そのものである。
($\Leftarrow$) A の上限を S とすると、上に示したように S は A の上界である。A の上界が存在するので、A は上に有界である。 □

1.3 (続き) 上界, 上に有界, 上限, sup

(次も簡単な命題であるが、証明の仕方を見てもらうため、ゆっくり説明)

命題 (最大値は上限である)

$A \subset \mathbb{R}$ とする。A の最大値が存在するならば、それは A の上限である。

1.3 (続き) 上界, 上に有界, 上限, sup

(次も簡単な命題であるが、証明の仕方を見てもらうため、ゆっくり説明)

命題 (最大値は上限である)

$A \subset \mathbb{R}$ とする。A の最大値が存在するならば、それは A の上限である。

証明 A の最大値を M とおく。M が A の最大値であるとは、次の条件が成り立つことである (前回説明した)。

(a) $(\forall x \in A)\ x \leq M$.

(b) $M \in A$.

(次も簡単な命題であるが、証明の仕方を見てもらうため、ゆっくり説明)

命題 (最大値は上限である)

$A \subset \mathbb{R}$ とする。A の最大値が存在するならば、それは A の上限である。

証明するため思い出し

S が A の上限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ (i) $(\forall x \in A)\ x \le S$. (ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ S - \varepsilon < x$.

証明 A の最大値を M とおく。M が A の最大値であるとは、次の条件が成り立つことである (前回説明した)。

(a) $(\forall x \in A)\ x \le M$.

(b) $M \in A$.

(次も簡単な命題であるが、証明の仕方を見てもらうため、ゆっくり説明)

命題 (最大値は上限である)

$A \subset \mathbb{R}$ とする。A の最大値が存在するならば、それは A の上限である。

証明するため思い出し

M が A の上限 $\Leftrightarrow$ (i) $(\forall x \in A)\ x \le M$. (ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ M - \varepsilon < x$.

証明 A の最大値を M とおく。M が A の最大値であるとは、次の条件が成り立つことである (前回説明した)。

ⓐ $(\forall x \in A)\ x \le M$.

ⓑ $M \in A$.

(次も簡単な命題であるが、証明の仕方を見てもらうため、ゆっくり説明)

命題 (最大値は上限である)

$A \subset \mathbb{R}$ とする。A の最大値が存在するならば、それは A の上限である。

証明するため思い出し

M が A の上限 $\Leftrightarrow$ (i) $(\forall x \in A)\ x \le M$. (ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ M - \varepsilon < x$.

証明 A の最大値を M とおく。M が A の最大値であるとは、次の条件が成り立つことである (前回説明した)。

(a) $(\forall x \in A)\ x \le M$.

(b) $M \in A$.

上限の定義の条件 (i) は (a) により満たされる (文字が違うだけで同じ条件)。

上限の定義の (ii) について: ε を任意の正の数とする。$x := M$ とおくと、(b) より $x \in A$. そして $M - \varepsilon < M = x$ より $M - \varepsilon < x$. $\square$

1.3 (続き) 下界, 下に有界, 下限

「上」を「下」に変えて、**下界**(かかい) (a lower bound), **下に有界** (bounded from below), **下限**(かげん) (the infimum) という言葉が定義される (おおざっぱに言って、大小を逆にするだけ、あるいは数直線上で表したとき左右を逆にする)。

1.3 (続き) 下界, 下に有界, 下限

「上」を「下」に変えて、**下界**(かかい) (a lower bound), **下に有界** (bounded from below), **下限**(かげん) (the infimum) という言葉が定義される (おおざっぱに言って、大小を逆にするだけ、あるいは数直線上で表したとき左右を逆にする)。

$A \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ とする。L が A の下界であるとは、$(\forall x \in A)\ x \geq L$ が成り立つことをいう。

1.3 (続き) 下界, 下に有界, 下限

「上」を「下」に変えて、**下界**（かかい） (a lower bound), **下に有界** (bounded from below), **下限**（かげん） (the infimum) という言葉が定義される (おおざっぱに言って、大小を逆にするだけ、あるいは数直線上で表したとき左右を逆にする)。

$A \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ とする。L が A の下界であるとは、$(\forall x \in A)\ x \geq L$ が成り立つことをいう。

$A \subset \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$ とする。I が A の下限であるとは

1.3 (続き) 下界, 下に有界, 下限

「上」を「下」に変えて、**下界**(かかい) (a lower bound), **下に有界** (bounded from below), **下限**(かげん) (the infimum) という言葉が定義される (おおざっぱに言って、大小を逆にするだけ、あるいは数直線上で表したとき左右を逆にする)。

$A \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ とする。L が A の下界であるとは、$(\forall x \in A)\ x \geq L$ が成り立つことをいう。

$A \subset \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$ とする。I が A の下限であるとは

(i) $(\forall x \in A)\ x \geq I$.　　(すなわち I は A の下界)

(ii)

1.3 (続き) 下界, 下に有界, 下限

「上」を「下」に変えて、**下界**(かかい) (a lower bound), **下に有界** (bounded from below), **下限**(かげん) (the infimum) という言葉が定義される (おおざっぱに言って、大小を逆にするだけ、あるいは数直線上で表したとき左右を逆にする)。

$A \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ とする。L が A の下界であるとは、$(\forall x \in A)\ x \geq L$ が成り立つことをいう。

$A \subset \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ とする。l が A の下限であるとは

(i) $(\forall x \in A)\ x \geq l$.　(すなわち l は A の下界)

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ l + \varepsilon > x$.

(l は A の下界のうちの最大値だから、l を少しでも大きくした $l + \varepsilon$ は A の下界でなくなる)

1.3 (続き) 下界, 下に有界, 下限

「上」を「下」に変えて、**下界**(かかい) (a lower bound), **下に有界** (bounded from below), **下限**(かげん) (the infimum) という言葉が定義される (おおざっぱに言って、大小を逆にするだけ、あるいは数直線上で表したとき左右を逆にする)。

$A \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ とする。L が A の下界であるとは、$(\forall x \in A)\ x \geq L$ が成り立つことをいう。

$A \subset \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ とする。l が A の下限であるとは

1. $(\forall x \in A)\ x \geq l$. (すなわち l は A の下界)
2. $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ l + \varepsilon > x$.

   (l は A の下界のうちの最大値だから、l を少しでも大きくした $l + \varepsilon$ は A の下界でなくなる)

上限公理から次の定理が導かれる (証明は手ごろな問題…今日の宿題)。

定理 (下に有界な空でない集合は下限を持つ)

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする。A が下に有界ならば A の下限が存在する。

1.3 (続き) 記号 sup, inf

定義 (上限、下限を表す記号 sup, inf)

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする。

$$\sup A := \begin{cases} A \text{ の上限} & (A \text{ が上に有界のとき、つまり } A \text{ の上限が存在するとき}) \\ \infty & (A \text{ が上に有界でないとき}) \end{cases}$$

$$\inf A := \begin{cases} A \text{ の下限} & (A \text{ が下に有界のとき、つまり } A \text{ の下限が存在するとき}) \\ -\infty & (A \text{ が下に有界でないとき}) \end{cases}$$

1.3 (続き) 記号 sup, inf

定義 (上限、下限を表す記号 sup, inf)

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする。

$$\sup A := \begin{cases} A \text{ の上限} & (A \text{ が上に有界のとき、つまり } A \text{ の上限が存在するとき}) \\ \infty & (A \text{ が上に有界でないとき}) \end{cases}$$

$$\inf A := \begin{cases} A \text{ の下限} & (A \text{ が下に有界のとき、つまり } A \text{ の下限が存在するとき}) \\ -\infty & (A \text{ が下に有界でないとき}) \end{cases}$$

注意　A の上限や下限が存在しないときも、$\sup A$, $\inf A$ という記号を用いるわけである。極限と lim という記号の関係に少し似ている。(例えば $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ のとき、$\{a_n\}$ の極限は存在しない。)

1.3 (続き) 記号 sup, inf

定義 (上限、下限を表す記号 sup, inf)

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする。

$$\sup A := \begin{cases} A \text{ の上限} & (A \text{ が上に有界のとき、つまり } A \text{ の上限が存在するとき}) \\ \infty & (A \text{ が上に有界でないとき}) \end{cases}$$

$$\inf A := \begin{cases} A \text{ の下限} & (A \text{ が下に有界のとき、つまり } A \text{ の下限が存在するとき}) \\ -\infty & (A \text{ が下に有界でないとき}) \end{cases}$$

注意　A の上限や下限が存在しないときも、$\sup A$, $\inf A$ という記号を用いるわけである。極限と lim という記号の関係に少し似ている。(例えば $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ のとき、$\{a_n\}$ の極限は存在しない。)

細かい注意　実は上の説明はちょっと乱暴。一体 ∞ とは何だろう？

定義 (上限、下限を表す記号 sup, inf)

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする。

$$\sup A := \begin{cases} A \text{ の上限} & (A \text{ が上に有界のとき、つまり } A \text{ の上限が存在するとき}) \\ \infty & (A \text{ が上に有界でないとき}) \end{cases}$$

$$\inf A := \begin{cases} A \text{ の下限} & (A \text{ が下に有界のとき、つまり } A \text{ の下限が存在するとき}) \\ -\infty & (A \text{ が下に有界でないとき}) \end{cases}$$

注意　A の上限や下限が存在しないときも、$\sup A$, $\inf A$ という記号を用いるわけである。極限と lim という記号の関係に少し似ている。(例えば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ のとき、$\{a_n\}$ の極限は存在しない。)

細かい注意　実は上の説明はちょっと乱暴。一体 ∞ とは何だろう？二つの立場がある。(a) ∞, $-\infty$ をきちんと導入して、$\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ で議論をする、(b) A が上に有界でないことを、$\sup A = \infty$ と表すと約束する。(a) は手間がかかるので、ここでは (b) の立場としておく。すると、上の書き方 (∞ を $\sup A$ とおく) は少しおかしい。

1.4 アルキメデスの公理　(当たり前のようで意外に重要)

定理 (アルキメデスの公理 「チリも積もれば山より高くなる」)

(1)
$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

定理 (アルキメデスの公理 「チリも積もれば山より高くなる」)

(1) $$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

証明

背理法を用いる。(1) が成り立たないとすると、ある正の数 a, b が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad na \le b.$$

このとき

$$A := \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$$

とおくと、b は A の上界である。ゆえに A は上に有界である。$A \neq \emptyset$ であるから、Weierstrass の上限公理によって、A の上限が存在する。それを S とおく。

$\varepsilon := \frac{a}{2}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ である。上限の定義より、ある $x \in A$ が存在して、$S - \varepsilon < x$.

A の定義から、ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $x = n_0 a$. このとき $y := (n_0 + 1)a$ とおくと、$y \in A$ であり、

$$y = (n_0 + 1)a = n_0 a + a = x + 2\varepsilon > (S - \varepsilon) + 2\varepsilon = S + \varepsilon > S.$$

ゆえに $y \in A$ かつ $y > S$ であるが、これは S が A の上限であることに矛盾する (上限は上界だから)。ゆえに (1) が成り立つ。

例

$A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ の上限は 1 であることを示せ。

例

$A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ の上限は 1 であることを示せ。

A の要素は小さい方から順に $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}, \cdots$

これで上限が 1 であることが「分かる」人もいるであろう。

例

$A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ の上限は 1 であることを示せ。
A の要素は小さい方から順に $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}, \cdots$
これで上限が 1 であることが「分かる」人もいるであろう。

証明

1. x を A の任意の要素とすると、ある自然数 n が存在して、$x = 1 - \dfrac{1}{n}$. ゆえに $x \leq 1$.

例

$A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ の上限は 1 であることを示せ。

A の要素は小さい方から順に $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}, \cdots$

これで上限が 1 であることが「分かる」人もいるであろう。

証明

(i) x を A の任意の要素とすると、ある自然数 n が存在して、$x = 1 - \dfrac{1}{n}$. ゆえに $x \leq 1$. *((i) は簡単なことが多いね。問題は次の (ii) だ。)*

例

$A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ の上限は 1 であることを示せ。
A の要素は小さい方から順に $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}, \cdots$
これで上限が 1 であることが「分かる」人もいるであろう。

証明

1. x を A の任意の要素とすると、ある自然数 n が存在して、$x = 1 - \dfrac{1}{n}$. ゆえに $x \leq 1$. *((i) は簡単なことが多いね。問題は次の (ii) だ。)*
2. ε を任意の正の数とする。
   アルキメデスの公理から、ある自然数が存在して $n \cdot \varepsilon > 1$. ゆえに $\varepsilon > \frac{1}{n}$.
   ゆえに $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$. $x := 1 - \frac{1}{n}$ とおくと、$x \in A$ かつ $1 - \varepsilon < x$.

(i), (ii) から 1 は A の上限である。 □

1.4 アルキメデスの公理 (続き) 上限の例

例

$A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ の上限は 1 であることを示せ。

A の要素は小さい方から順に $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}, \cdots$

これで上限が 1 であることが「分かる」人もいるであろう。

証明

(i) x を A の任意の要素とすると、ある自然数 n が存在して、$x = 1 - \dfrac{1}{n}$. ゆえに $x \leq 1$. *((i) は簡単なことが多いね。問題は次の (ii) だ。)*

(ii) ε を任意の正の数とする。

アルキメデスの公理から、ある自然数が存在して $n \cdot \varepsilon > 1$. ゆえに $\varepsilon > \frac{1}{n}$.
ゆえに $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$. $x := 1 - \frac{1}{n}$ とおくと、$x \in A$ かつ $1 - \varepsilon < x$.

(i), (ii) から 1 は A の上限である。 □

実は、有名な $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ の証明もこれに近い (後日解説)。 $\cdots$意外に重要!!

宿題 2

締め切り 5 月 23 日 (土) 18:00.
解答を A4 サイズの PDF ファイルにして、Oh-o! Meiji で提出すること。

問題文は
`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2020/toi2.pdf`
にあります (Oh-o! Meiji のレポート課題 2)。

出題のねらい: 上限、下限について、定義に基づいた議論が出来るようになる

PDF ファイルは、どういう方法で作成しても構わない。詳しいことは「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」
`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf`

問 2

1. $A \subset \mathbb{R}$ であり、また $J, K \in \mathbb{R}$ とする。
(a) J が A の上限であるための条件を記せ。 (b) K が A の下限であるための条件を記せ。

2. $A = (1, 2]$ とするとき、以下の問に答えよ。
(a) A の上限を求め、上限である根拠を述べよ。(b) A の下限を求め、下限である根拠を述べよ。

3. $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A は下に有界とする。$B := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$ とおく。このとき以下の問に答えよ。
(a) B が上に有界であることを示せ。 (b) $B \neq \emptyset$ であることを示せ。
(c) B の上限を S とすると、$-S$ は A の下限であることを示せ。