

数学解析 第1回

～ ガイダンス, 集合と論理の復習, 実数の性質 (第1回)

桂田 祐史

2020年5月11日

ガイダンス (1) 自己紹介

氏名	桂田 (かつらだ) 祐史 (まさし)
研究室	910 号室
メール	katurada あっとまーく meiji どっと ac どっと jp
講義資料	http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/ (講義ノート, 宿題, 過去問, などなど)
質問対応	例年「気軽に研究室に来て下さい」と言っているが… 授業アンケートまたは授業後半に Zoom 会議? 両方やってそのうちどちらかにしぼる
研究テーマ	数値計算法の数理 (数値計算の方法を数学的に解析する)

ガイダンス (2) 「数学解析」とは

解析とは、**極限**を (用いる | 扱う) 数学である。

(講義ノート §0.2 「なぜ解析学？」には、数学の中には、極限を用いることで表現できるようになるものが多い、という話を書いてある。)

「数学解析」では、**微積分に現れる極限**を扱う。

数学科では、微積分の講義の中に、この「数学解析」の内容を含めてある。逆に言うと、数学科の微積分の講義から、極限に関する議論を抜き出したのが、この科目である。

敬遠されるかと思ったが、面白いと言う人も。君が面白いと感じられますように。

ガイダンス (3) 数学解析と他の数学科目・分野との関係

- 「数理解ラシー」 → 「数学の方法」 → 「数学解析」 ≒ 「トポロジー」
- 幾何、代数、解析のうち、解析で「数学解析」が必要になるのは当然だけれど、幾何でも必要になる。
- 秋学期の「複素関数・同演習」は「数学解析」の内容を良く使う。
- フーリエ解析（「数学とメディア」、「信号処理とフーリエ変換」）では、関数列の極限（無限次元空間における極限）が出て来るので、「関数解析」（4年次先取り履修可能）が必要になる。

無限次元空間では、しばしば素朴な直観が通用しなくなり、論理的に扱う必要性が高まる（数学解析はそのための準備トレーニングになる）。

ガイダンス (4) 「数学解析」の具体的内容, 勉強の仕方

- 講義ノート of §10 「積分」 くらいまで (90 ページ くらいの分量)。 (積分は補講? これはまとまりのある話で一気に勉強しやすい。)
- 計算問題はほとんどない (極限を求める問題というのほぼない)。 計算問題を解くことで理解できるという科目ではない。
- 講義ノートには、練習用の「問」がある。その多くには解答もつけてある。自習に活用して欲しい。
- 宿題は授業 2 回に 1 つくらい出す (昨年度は 8 問だった, 今年は 7 問かな?)。

何を参考にしても、誰に相談しても良いが、最後は自分で書いて出すこと。人が書いたものを写すのではやる意味がない (コピーと判断した時点で添削をやめます)。演習代わりであり、添削したものを学生が復習することに意味があると考えている。

今日も宿題を出します。

ガイダンス (5) 「数学解析」の授業の受け方

- **どちらかと言うと、復習を勧めます** (講義ノートがあるので予習できなくもないけれど)。
- 前回までに学んだ**言葉の定義や定理を思い出して授業にのぞむ**。(比較的少数の言葉が何十回も登場することになる。思い出せないと、すぐに訳のわからない話になってしまう。)
- 例年、板書したものをノートに取ってもらう形で行っていた。オンライン授業の際は資料をそのまま渡すので、書く必要はないかもしれないが、最低限**言葉や記号の定義、定理などは、書くと良い**かもしれない(頭に入れるため)。
- 授業中に何回か「これをやってみましょう」と言うつもりです。取り掛かれるようにノートとペンは用意しておいて下さい。
- 質問対応をどうやってやるか検討中です。メール, LINE, Oh-o! Meijiのディスカッション, 授業時間中の Zoom, どれがいいでしょうか? アンケートでもしてみようかな。

0. 論理と集合の復習 (1) 数の集合の記号 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$\mathbb{N} :=$ 自然数全体の集合 $= \{1, 2, 3, \dots\}$.

(自然数は英語で **n**atural number)

$\mathbb{Z} :=$ 整数全体の集合 $= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

(数をドイツ語で **Z**ahl ということが由来?)

$\mathbb{Q} :=$ 有理数全体の集合 $= \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$.

(商を英語で **q**uotient ということが由来?)

$\mathbb{R} :=$ 実数全体の集合.

(実数は英語で **r**eal number)

$\mathbb{C} :=$ 複素数全体の集合 $= \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

(複素数は英語で **c**omplex number)

無理数全体の集合を表す記号は特にない。

やってみよう

自然数全体、整数全体、有理数全体、実数全体、複素数全体、それぞれどう書きますか？

0. 論理と集合の復習 (2) 量称記号の読み方 (i)

\forall, \exists を量称記号とよぶ。数理リテラシーで学んだ。この講義でも良く用いるので復習しておこう。

- $\forall x P(x)$ は、「 $\left\{ \begin{array}{l} \text{任意の} \\ \text{すべての} \end{array} \right\} x$ に $\left\{ \begin{array}{l} \text{対して} \\ \text{ついて} \end{array} \right\} P(x)$ (が成り立つ、である)。」と読む。
- $\exists x P(x)$ は、「ある x が存在して $P(x)$ (が成り立つ)。」と読む。

「 $P(x)$ が成り立つような x が存在する。」と読んでも良いけれど (その方が日本語として自然であるが)、量称記号の数が増えると、うまく行かないので、機械的に前から順に読む前者の方法を勧める。

…… 以上が基本である。実際は、色々な変種が用いられる。

0. 論理と集合の復習 (3) 量称記号の読み方 (ii)

まず \forall の場合の例から。

Example

$\forall x (x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)$ を $(\forall x : x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 0$ や $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 0$ で表す。

- 一般に $\forall x (P_1(x) \Rightarrow P_2(x))$ を $(\forall x : P_1(x)) P_2(x)$ と表す。
「 $P_1(x)$ を満たす任意の x に対して $P_2(x)$ が成り立つ」と読む。
- 一般に $\forall x (x \in A \Rightarrow P_2(x))$ を $(\forall x \in A) P_2(x)$ と表す。
「 A の任意の要素 x に対して $P_2(x)$ 」と読む。
例えば、 $x \in \mathbb{R}$ の場合は「任意の実数 x に対して $P_2(x)$ 」と読む。

Example

$\forall x (x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2)$ を $(\forall x > 0) x + \frac{1}{x} \geq 2$ と表す。

「任意の正の数 x に対して $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 。」

$(\forall x : x > 0) x + \frac{1}{x} > 0$ の短縮形と考えると良いだろう。

0. 論理と集合の復習 (4) 量称記号の読み方 (iii)

\exists の場合の例。

Example ($\sqrt{2}$ の存在)

$\exists x (x > 0 \wedge x^2 = 2)$ を $(\exists x : x > 0) x^2 = 2$ や $(\exists x > 0) x^2 = 2$ で表す。

- 一般に $\exists x (P_1(x) \wedge P_2(x))$ を $(\exists x : P_1(x)) P_2(x)$ と表す。
「 $P_1(x)$ を満たす x が存在して $P_2(x)$ が成り立つ」と読む。
- 一般に $\exists x (x \in A \wedge P_2(x))$ を $(\exists x \in A) P_2(x)$ と表す。
「 A のある要素 x が存在して $P_2(x)$ 」と読む。
 $x \in \mathbb{R}$ の場合は「ある実数 x が存在して $P_2(x)$ 」と読む。

0. 論理と集合の復習 (5) 量称記号の読み方 (iv)

細かいバリエーション

- \exists の後に s.t. (such that) をつけるテキストも多い。
この講義ではつけないことにする (日本語の講義ノートなので…)。
例えば「 $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $n\varepsilon > 1$ 」でなく「 $(\exists n \in \mathbb{N}) n\varepsilon > 1$ 」と書く。
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$ のように \forall が連続するときは、 $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ のように略して書く。
- 同様に $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})$ のように \exists が連続するときは、 $(\exists x, y \in \mathbb{R})$ のように略して書く。

命題を論理式で表すことの利点

- ❶ 記号を使わないと困るような (書きにくい、書いても分かりにくい or 曖昧になったりする) 長い複雑な命題がある。
- ❷ 否定命題が機械的に作れる。

やってみよう

Q1 次の式を日本語で読んでみよう。

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

「任意の正の数 a (に対して), 任意の正の数 b に対して、ある自然数 n が存在して、 $na > b$ (が成り立つ)。」

または

「任意の正の数 a, b に対して、ある自然数 n が存在して、 $na > b$ 。」

これはアルキメデスの公理と呼ばれる有名な定理である (後日証明)。

Q2 この命題の否定命題は？

$$(\exists a > 0)(\exists b > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \neg(na > b).$$

言い換えると

$$(\exists a > 0)(\exists b > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad na \leq b.$$

Q3 この式を日本語で読むと？

「ある正の数 a, b が存在して、任意の自然数 n に対して $na \leq b$ 。」

1 実数の性質の復習, 有界集合, 上限と下限, Weierstrass の上限公理

実数の全体 \mathbb{R} の性質のうち、極限を扱うときに重要な**連続性** (おおざっぱに言うと、数直線には隙間がない、ということ) について説明する。

(Cf. 有理数の全体 \mathbb{Q} は稠密であるが、隙間がある。)

\mathbb{R} の連続性については、^{ワイエルシュトラス}**Weierstrass の上限公理**という定理を認めて議論する。

1.1 実数の性質まとめ

実数全体の集合 \mathbb{R} は、次の3つの性質を持つ。

- ① 可換体 (四則演算がちゃんとできる)
- ② 順序体 (全順序集合であり、加法・乗法と両立している)
- ③ 連続性 (隙間がない)

$K = \mathbb{R}$ が**可換体**とは、加法について可換群、加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たす、こと。

- ① $(\forall a, b, c \in K) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$
- ② $(\exists 0_K \in K) (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$
- ③ $(\forall a \in K) (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$
- ④ $(\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$
- ⑤ $(\forall a, b, c \in K) \quad (ab)c = a(bc)$
- ⑥ $(\exists 1_K \in K) (\forall a \in K) \quad a1_K = 1_K a = a$
- ⑦ $(\forall a \in K \setminus \{0_K\}) (\exists a'' \in K) \quad aa'' = a''a = 1_K$
- ⑧ $(\forall a, b, c \in K) \quad (a + b)c = ac + bc, a(b + c) = ab + ac$
- ⑨ $(\forall a, b \in K) \quad ab = ba$

(加法の単位元 0_K は通常の 0、乗法の単位元 1_K は通常の 1 である。)

1.1 実数の性質まとめ (続き)

$K = \mathbb{R}$ が通常順序 \leq により順序体をなすとは、(体であることに加えて、全順序集合であり、順序関係が体の加法・乗法と両立する)。

- ① $(\forall a, b \in K) \quad (a \leq b \vee b \leq a)$ (任意の2元は比較可能)
- ② $(\forall a, b \in K) \quad (a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b)$
- ③ $(\forall a, b, c \in K) \quad (a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c)$
- ④ $(\forall a, b, c \in K) \quad (a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c)$
- ⑤ $(\forall a, b \in K) \quad (0 \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab)$

1.2 実数の連続性

さらに $K = \mathbb{R}$ は**実数の連続性**とよばれる性質を持つ。

連続性の表し方には色々ある。例えば次の3つが有名:

- ① ワイエルシュトラス Weierstrass の上限公理
- ② デデキント Dedekind の公理 (「切断の存在」)
- ③ アルキメデスの公理と完備性

この講義では (a) を採用する。これからゆっくり説明する。

Theorem (Weierstrass の上限公理)

\mathbb{R} の部分集合 A が空集合ではなく、かつ上に有界ならば、 A の じょうげん 上限が存在する。

($A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A は上に有界とすると、 A の上限が存在する。)

(これは定理であるが、この講義では証明をしないで認めることにする。)
「上に有界」, 「上限」という言葉の定義はこれから説明する。

1.3 上界, 上に有界, 上限, sup

最大値という概念を一般化した上限という概念を導入する。

Definition (上界)

$A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。 U が A の じょうかい上界 (an upper bound of A) であるとは、

$$(\forall x \in A) \quad x \leq U$$

が成り立つことをいう。

Definition (上に有界)

$A \subset \mathbb{R}$ とする。 A が うえ ゆうかい上に**有界** (bounded from above) であるとは、 A の上界が (少なくとも 1 つ) 存在すること、すなわち、

$$(\exists U \in \mathbb{R}) \quad (\forall x \in A) \quad x \leq U$$

が成り立つことをいう。

(A の上界が存在することを、「 A は上界を持つ」という。)

Example (上界, 上に有界)

- ① $A = \{1, 2, 3\}$ の場合。 $U = 3$ は A の上界である。 $U = 4$ も A の上界である。上界は一つではない。 A の上界が存在するので、 A は上に有界である。
- ② $A = [1, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$ の場合。この場合も $U = 3$ は A の上界である。 $U = 4$ も A の上界である。上界は一つではない。 A の上界が存在するので、 A は上に有界である。
- ③ $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ の場合。 A の上界は存在しない！ A は上に有界ではない。

(少しフライングして) 実は上界が存在するときは、上界の最小値が存在する。それを**上限**と呼ぶ。(1), (2) ともに、3は A の上限である。

図示してみる

授業で描いた図

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/fig-part4.pdf>

(少し先走って) 最大値と上限

次の2つが成り立つ。

- もし A の最大値が存在すれば、それは A の上限である (後で証明)。
- 一方、 A の最大値が存在しないときにも A の上限が存在することがある。

(例えば $A = [1, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$ は最大値を持たないが、上限は 3.)

ちょっと変な言い方だけれど、上限の方が最大値よりも存在しやすい。

最大値とは？定義を学ぶ

$A \subset \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ とする。 M が A の最大値であるとは？
次の2条件が成り立つとき、 M は A の最大値であるという。

Ⓐ $(\forall x \in A) x \leq M.$

Ⓑ $M \in A.$

(A の最大値を $\max A$ と表す。 $M = \max A$ ということ。)

$A = \{1, 2, 3\}$, $M = 3$ とするとき、(i), (ii) が成り立つ。

($\because x \in A$ とすると、 $x = 1$ または $x = 2$ または $x = 3$. いずれも $x \leq 3 = M$ を満たす。また $M = 3 \in A$ が成り立つ。)

$A = [1, 3)$, $M = 3$ とするとき、(i) は成り立つが、(ii) は成り立たない。
(この A の最大値は実は存在しない。)

上限の定義

一言でいうと「上限とは、上界のうちで最小のもの」。

Definition (上限)

$A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ とする。 S が A の**上限** (supremum) であるとは、次の (i), (ii) が成り立つことをいう。

(i)

$$(\forall x \in A) \quad x \leq S.$$

(つまり S は A の上界である。)

(ii)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) \quad S - \varepsilon < x.$$

(つまり S より小さい数は A の上界ではない。)

詳しいことは次回に説明する。今日の講義はここまでです。宿題を出す

宿題 1

締め切り 5月16日(土) 18:00. 今回は締め切り後の提出も認める。
解答を A4 サイズの PDF ファイルにして、Oh-o! Meiji で提出すること。

問題文は

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2020/toi1.pdf>
にあります (Oh-o! Meiji のレポート課題 1)。

出題のねらい: 量称記号 \forall, \exists を使う練習

PDF ファイルは、どういう方法で作成しても構わない。詳しいことは
「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf

おまけ: L^AT_EX を使うヒント

L^AT_EX での PDF 作成にチャレンジする人は少ないだろうけれど、応援しよう、という趣旨。

- \forall は `\forall` と入力する。
- \exists は `\exists` と入力する。
- \mathbb{R} は、`\mathbb{R}` と入力する。これを使うためには、`\begin{document}` の前に

```
\usepackage{amssymb}
```

と書く必要がある。

- \wedge は、`\land` または `\wedge` と入力する。
- \vee は、`\lor` または `\vee` と入力する。
- 集合の表現 $A = \{x \mid 1 \leq x < 3\}$ に出て来る縦棒 $|$ は `\mid` と入力する。長くするのがちょっと難しい。

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/tex2019/node22.html>