数学解析 第 1 回

〜 ガイダンス, 集合と論理の復習, 実数の性質 (第 1 回)

桂田 祐史

2020 年 5 月 11 日

ガイダンス (1) 自己紹介

氏名	桂田 (かつらだ) 祐史 (まさし)
研究室	910 号室
メール	katurada あっとまーく meiji どっと ac どっと jp
講義資料	http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/ (講義ノート, 宿題, 過去問, などなど)
質問対応	例年「気軽に研究室に来て下さい」と言ってあるが… 授業アンケートまたは授業後半に Zoom 会議？ 両方やってそのうちどちらかにしぼる
研究テーマ	数値計算法の数理 (数値計算の方法を数学的に解析する)

ガイダンス (2)「数学解析」とは

解析とは、**極限**を (用いる | 扱う) 数学である。

(講義ノート §0.2「なぜ解析学？」には、数学の中には、極限を用いることで表現できるようになるものが多い、という話を書いてある。*)*

ガイダンス (2) 「数学解析」とは

解析とは、**極限**を (用いる | 扱う) 数学である。

(講義ノート §0.2「なぜ解析学？」には、数学の中には、極限を用いることで表現できるようになるものが多い、という話を書いてある。*)*

「数学解析」では、微積分に現れる極限を扱う。

　数学科では、微積分の講義の中に、この「数学解析」の内容を含めてある。逆に言うと、数学科の微積分の講義から、極限に関する議論を抜き出したのが、この科目である。
　敬遠されるかと思ったが、面白いと言う人も。君が面白いと感じられますように。

ガイダンス (3) 数学解析と他の数学科目・分野との関係

- 「数理リテラシー」$\rightarrow$「数学の方法」$\rightarrow$「数学解析」$\fallingdotseq$「トポロジー」

ガイダンス (3) 数学解析と他の数学科目・分野との関係

- 「数理リテラシー」→「数学の方法」→「数学解析」≒「トポロジー」
- 幾何、代数、解析のうち、解析で「数学解析」が必要になるのは当然だけれど、幾何でも必要になる。

ガイダンス (3) 数学解析と他の数学科目・分野との関係

- 「数理リテラシー」→「数学の方法」→「数学解析」≒「トポロジー」
- 幾何、代数、解析のうち、解析で「数学解析」が必要になるのは当然だけれど、幾何でも必要になる。
- 秋学期の「複素関数・同演習」は「数学解析」の内容を良く使う。

ガイダンス (3) 数学解析と他の数学科目・分野との関係

- 「数理リテラシー」→「数学の方法」→「数学解析」≒「トポロジー」
- 幾何、代数、解析のうち、解析で「数学解析」が必要になるのは当然だけれど、幾何でも必要になる。
- 秋学期の「複素関数・同演習」は「数学解析」の内容を良く使う。
- フーリエ解析 (「数学とメディア」、「信号処理とフーリエ変換」) では、関数列の極限 (無限次元空間における極限) が出て来るので、「関数解析」 (4 年次先取り履修可能) が必要になる。

無限次元空間では、しばしば素朴な直観が通用しなくなり、論理的に扱う必要性が高まる (数学解析はそのための準備トレーニングになる)。

ガイダンス (4) 「数学解析」の具体的内容, 勉強の仕方

- 講義ノートの §10「積分」くらいまで (90 ページくらいの分量)。
(積分は補講？これはまとまりのある話で一気に勉強しやすい。)
- 計算問題はほとんどない (極限を求める問題というのはほぼない)。
計算問題を解くことで理解できるという科目ではない。
- 講義ノートには、練習用の「問」がある。その多くには解答もつけてある。自習に活用して欲しい。
- 宿題は授業 2 回に 1 つくらい出す (昨年度は 8 問だった, 今年は 7 問かな？)。
何を参考にしても、誰に相談しても良いが、最後は自分で書いて出すこと。人が書いたものを写すのではやる意味がない (コピーと判断した時点で添削をやめます)。演習代わりであり、添削したものを学生が復習することに意味があると考えている。

今日も宿題を出します。

ガイダンス (5) 「数学解析」の授業の受け方

- どちらかと言うと、復習を勧めます (講義ノートがあるので予習できなくもないけれど)。

ガイダンス (5) 「数学解析」の授業の受け方

- どちらかと言うと、復習を勧めます (講義ノートがあるので予習できなくもないけれど)。
- 前回までに学んだ言葉の定義や定理を思い出して授業にのぞむ。(比較的少数の言葉が何十回も登場することになる。思い出せないと、すぐに訳のわからない話になってしまう。)

ガイダンス (5) 「数学解析」の授業の受け方

- どちらかと言うと、復習を勧めます (講義ノートがあるので予習できなくもないけれど)。
- 前回までに学んだ言葉の定義や定理を思い出して授業にのぞむ。(比較的少数の言葉が何十回も登場することになる。思い出せないと、すぐに訳のわからない話になってしまう。)
- 例年、板書したものをノートに取ってもらう形で行っていた。オンライン授業の際は資料をそのまま渡すので、書く必要はないかもしれないが、最低限言葉や記号の定義、定理などは、書くと良いかもしれない (頭に入れるため)。

ガイダンス (5) 「数学解析」の授業の受け方

- どちらかと言うと、復習を勧めます (講義ノートがあるので予習できなくもないけれど)。
- 前回までに学んだ言葉の定義や定理を思い出して授業にのぞむ。(比較的少数の言葉が何十回も登場することになる。思い出せないと、すぐに訳のわからない話になってしまう。)
- 例年、板書したものをノートに取ってもらう形で行っていた。オンライン授業の際は資料をそのまま渡すので、書く必要はないかもしれないが、最低限言葉や記号の定義、定理などは、書くと良いかもしれない (頭に入れるため)。
- 授業中に何回か「これをやってみましょう」と言うつもりです。取り掛かれるようにノートとペンは用意しておいて下さい。

ガイダンス (5) 「数学解析」の授業の受け方

- どちらかと言うと、復習を勧めます (講義ノートがあるので予習できなくもないけれど)。
- 前回までに学んだ言葉の定義や定理を思い出して授業にのぞむ。(比較的少数の言葉が何十回も登場することになる。思い出せないと、すぐに訳のわからない話になってしまう。)
- 例年、板書したものをノートに取ってもらう形で行っていた。オンライン授業の際は資料をそのまま渡すので、書く必要はないかもしれないが、最低限言葉や記号の定義、定理などは、書くと良いかもしれない (頭に入れるため)。
- 授業中に何回か「これをやってみましょう」と言うつもりです。取り掛かれるようにノートとペンは用意しておいて下さい。
- 質問対応をどうやってやるか検討中です。メール, LINE, Oh-o! Meiji のディスカッション, 授業時間中の Zoom, どれがいいでしょうか？アンケートでもしてみようかな。

$\mathbb{N} :=$ 自然数全体の集合 $= \{1, 2, 3, \cdots\}$.

(自然数は英語で natural number)

$\mathbb{Z} :=$ 整数全体の集合 $= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$.

(数をドイツ語で Zahl ということが由来？)

$\mathbb{Q} :=$ 有理数全体の集合 $= \left\{ \dfrac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \right\}$.

(商を英語で quotient ということが由来？)

$\mathbb{R} :=$ 実数全体の集合.

(実数は英語で real number)

$\mathbb{C} :=$ 複素数全体の集合 $= \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

(複素数は英語で complex number)

無理数全体の集合を表す記号は特にない。

やってみよう

自然数全体、整数全体、有理数全体、実数全体、複素数全体、それぞれどう書きますか？

0. 論理と集合の復習 (2) 量称記号の読み方 (i)

$\forall$, $\exists$ を**量称記号**とよぶ。数理リテラシーで学んだ。この講義でも良く用いるので復習しておこう。

- $\forall x\ P(x)$ は、「$\left\{\begin{array}{l}\text{任意の}\\ \text{すべての}\end{array}\right\}$ x に $\left\{\begin{array}{l}\text{対して}\\ \text{ついて}\end{array}\right\}$ $P(x)$ (が成り立つ、である)。」と読む。
- $\exists x\ P(x)$ は、「ある x が存在して $P(x)$ (が成り立つ)。」と読む。

  「$P(x)$ が成り立つような x が存在する。」と読んでも良いけれど (その方が日本語として自然であるが)、量称記号の数が増えると、うまく行かないので、機械的に前から順に読む前者の方法を勧める。

…… 以上が基本である。実際は、色々な変種が用いられる。

0. 論理と集合の復習 (3) 量称記号の読み方 (ii)

まず $\forall$ の場合の例から。

Example

$\forall x\ (x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)$ を $(\forall x : x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$ や $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$ で表す。

0. 論理と集合の復習 (3) 量称記号の読み方 (ii)

まず $\forall$ の場合の例から。

Example

$\forall x\ (x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)$ を $(\forall x : x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$ や $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$ で表す。

- 一般に $\forall x\ (P_1(x) \Rightarrow P_2(x))$ を $(\forall x : P_1(x))\ P_2(x)$ とも表す。
  「$P_1(x)$ を満たす任意の x に対して $P_2(x)$ が成り立つ」と読む。
- 一般に $\forall x\ (x \in A \Rightarrow P_2(x))$ を $(\forall x \in A)\ P_2(x)$ とも表す。
  「A の任意の要素 x に対して $P_2(x)$」と読む。
  例えば、$x \in \mathbb{R}$ の場合は「任意の実数 x に対して $P_2(x)$」と読む。

まず $\forall$ の場合の例から。

Example

$\forall x\ (x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)$ を $(\forall x : x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$ や $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$ で表す。

- 一般に $\forall x\ (P_1(x) \Rightarrow P_2(x))$ を $(\forall x : P_1(x))\ P_2(x)$ とも表す。

  「$P_1(x)$ を満たす任意の x に対して $P_2(x)$ が成り立つ」と読む。
- 一般に $\forall x\ (x \in A \Rightarrow P_2(x))$ を $(\forall x \in A)\ P_2(x)$ とも表す。
  「A の任意の要素 x に対して $P_2(x)$」と読む。
  例えば、$x \in \mathbb{R}$ の場合は「任意の実数 x に対して $P_2(x)$」と読む。

Example

$\forall x\ (x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2)$ を $(\forall x > 0)\ x + \frac{1}{x} \geq 2$ とも表す。

「任意の正の数 x に対して $x + \frac{1}{x} \geq 2$.」

$(\forall x : x > 0)\ x + \frac{1}{x} > 0$ の短縮形と考えると良いだろう。

0. 論理と集合の復習 (4) 量称記号の読み方 (iii)

$\exists$ の場合の例。

Example ($\sqrt{2}$ の存在)

$\exists x\ (x > 0 \land x^2 = 2)$ を $(\exists x : x > 0)\ x^2 = 2$ や $(\exists x > 0)\ x^2 = 2$ で表す。

- 一般に $\exists x\ (P_1(x) \land P_2(x))$ を $(\exists x : P_1(x))\ P_2(x)$ とも表す。
  「$P_1(x)$ を満たす x が存在して $P_2(x)$ が成り立つ」と読む。
- 一般に $\exists x\ (x \in A \land P_2(x))$ を $(\exists x \in A)\ P_2(x)$ とも表す。
  「A のある要素 x が存在して $P_2(x)$」と読む。
  $x \in \mathbb{R}$ の場合は「ある実数 x が存在して $P_2(x)$」と読む。

細かいバリエーション

- $\exists$ の後に s.t. (such that) をつけるテキストも多い。
  この講義ではつけないことにする (日本語の講義ノートなので$\cdots$)。
  例えば「$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $n\varepsilon > 1$」でなく「$(\exists n \in \mathbb{N})\ n\varepsilon > 1$」と書く。
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$ のように $\forall$ が連続するときは、$(\forall x, y \in \mathbb{R})$ のように略して書く。
- 同様に $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})$ のように $\exists$ が連続するときは、
  $(\exists x, y \in \mathbb{R})$ のように略して書く。

命題を論理式で表すことの利点

(i) 記号を使わないと困るような (書きにくい、書いても分かりにくい or 曖昧になったりする) 長い複雑な命題がある。

(ii) 否定命題が機械的に作れる。

やってみよう

Q1 次の式を日本語で読んでみよう。

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

やってみよう

Q1 次の式を日本語で読んでみよう。

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

「任意の正の数 a (に対して), 任意の正の数 b に対して、ある自然数 n が存在して、$na > b$ (が成り立つ)。」
または
「任意の正の数 a, b に対して、ある自然数 n が存在して、$na > b$.」

これはアルキメデスの公理と呼ばれる有名な定理である (後日証明)。

やってみよう

Q1 次の式を日本語で読んでみよう。

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

「任意の正の数 a (に対して), 任意の正の数 b に対して、ある自然数 n が存在して、$na > b$ (が成り立つ)。」
または
「任意の正の数 a, b に対して、ある自然数 n が存在して、$na > b$.」

これはアルキメデスの公理と呼ばれる有名な定理である (後日証明)。

Q2 この命題の否定命題は？

やってみよう

Q1 次の式を日本語で読んでみよう。

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

「任意の正の数 a (に対して), 任意の正の数 b に対して、ある自然数 n が存在して、$na > b$ (が成り立つ)。」
または
「任意の正の数 a, b に対して、ある自然数 n が存在して、$na > b$.」

これはアルキメデスの公理と呼ばれる有名な定理である (後日証明)。

Q2 この命題の否定命題は？

$$(\exists a > 0)(\exists b > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \neg(na > b).$$

言い換えると

$$(\exists a > 0)(\exists b > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad na \leq b.$$

Q3 この式を日本語で読むと？

やってみよう

Q1 次の式を日本語で読んでみよう。

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

「任意の正の数 a (に対して), 任意の正の数 b に対して、ある自然数 n が存在して、$na > b$ (が成り立つ)。」
または
「任意の正の数 a, b に対して、ある自然数 n が存在して、$na > b$.」

これはアルキメデスの公理と呼ばれる有名な定理である (後日証明)。

Q2 この命題の否定命題は？

$$(\exists a > 0)(\exists b > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \neg(na > b).$$

言い換えると

$$(\exists a > 0)(\exists b > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad na \leq b.$$

Q3 この式を日本語で読むと？
「ある正の数 a, b が存在して、任意の自然数 n に対して $na \leq b$.」

1 実数の性質の復習, 有界集合, 上限と下限, Weierstrass の上限公理

実数の全体 $\mathbb{R}$ の性質のうち、極限を扱うときに重要な**連続性** (おおざっぱに言うと、数直線には隙間がない、と言うこと) について説明する。

(Cf. 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ は稠密であるが、隙間がある。)

$\mathbb{R}$ の連続性については、**Weierstrass** (ワイエルシュトラス) **の上限公理**という定理を認めて議論する。

1.1 実数の性質まとめ

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は、次の 3 つの性質を持つ。

1. 可換体 (四則演算がちゃんとできる)
2. 順序体 (全順序集合であり、加法・乗法と両立している)
3. 連続性 (隙間がない)

$K=\mathbb{R}$ が**可換体**とは、加法について可換群, 加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たす、こと。

1. $(\forall a,b,c\in K)\quad (a+b)+c=a+(b+c)$
2. $(\exists 0_K\in K)\ (\forall a\in K)\quad a+0_K=0_K+a=a$
3. $(\forall a\in K)\ (\exists a'\in K)\quad a+a'=a'+a=0_K$
4. $(\forall a,b\in K)\quad a+b=b+a$
5. $(\forall a,b,c\in K)\quad (ab)c=a(bc)$
6. $(\exists 1_K\in K)\ (\forall a\in K)\quad a1_K=1_Ka=a$
7. $(\forall a\in K\setminus\{0_K\})\ (\exists a''\in K)\quad aa''=a''a=1_K$
8. $(\forall a,b,c\in K)\quad (a+b)c=ac+bc,\ a(b+c)=ab+ac$
9. $(\forall a,b\in K)\quad ab=ba$

(加法の単位元 0_K は通常の 0、乗法の単位元 1_K は通常の 1 である。)

$K=\mathbb{R}$ が通常の順序 $\leq$ により**順序体**をなすとは、(体であることに加えて、全順序集合であり、順序関係が体の加法・乗法と両立する)。

1. $(\forall a, b \in K) \quad (a \leq b \vee b \leq a)$ (任意の 2 元は比較可能)
2. $(\forall a, b \in K) \quad (a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b)$
3. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c)$
4. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c)$
5. $(\forall a, b \in K) \quad (0 \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab)$

1.2 実数の連続性

さらに $K = \mathbb{R}$ は**実数の連続性**とよばれる性質を持つ。

連続性の表し方には色々ある。例えば次の 3 つが有名:

(a) Weierstrass(ワイエルシュトラス) の上限公理

(b) Dedekind(デデキント) の公理 (「切断の存在」)

(c) アルキメデスの公理と完備性

この講義では (a) を採用する。これからゆっくり説明する。

Theorem (Weierstrass の上限公理)

$\mathbb{R}$ の部分集合 A が空集合ではなく、かつ上に有界ならば、A の上限(じょうげん)が存在する。

($A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A は上に有界とすると、A の上限が存在する。)

(これは定理であるが、この講義では証明をしないで認めることにする。)

「上に有界」,「上限」という言葉の定義はこれから説明する。

1.3 上界, 上に有界, 上限, sup

最大値という概念を一般化した上限という概念を導入する。

Definition (上界)

$A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。U が A の **上界**(じょうかい) (an upper bound of A) であるとは、

$$(\forall x \in A) \quad x \leq U$$

が成り立つことをいう。

Definition (上に有界)

$A \subset \mathbb{R}$ とする。A が**上に有界**(うえ に ゆうかい) (bounded from above) であるとは、A の上界が (少なくとも 1 つ) 存在すること、すなわち、

$$(\exists U \in \mathbb{R}) \quad (\forall x \in A) \quad x \leq U$$

が成り立つことをいう。
(A の上界が存在することを、「A は上界を持つ」という。)

上界, 上に有界の例

Example (上界, 上に有界)

1. $A = \{1, 2, 3\}$ の場合。$U = 3$ は A の上界である。$U = 4$ も A の上界である。上界は一つではない。A の上界が存在するので、A は上に有界である。

上界, 上に有界の例

Example (上界, 上に有界)

1. $A = \{1, 2, 3\}$ の場合。$U = 3$ は A の上界である。$U = 4$ も A の上界である。上界は一つではない。A の上界が存在するので、A は上に有界である。
2. $A = [1, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$ の場合。この場合も $U = 3$ は A の上界である。$U = 4$ も A の上界である。上界は一つではない。A の上界が存在するので、A は上に有界である。

上界, 上に有界の例

Example (上界, 上に有界)

1. $A = \{1, 2, 3\}$ の場合。$U = 3$ は A の上界である。$U = 4$ も A の上界である。上界は一つではない。A の上界が存在するので、A は上に有界である。
2. $A = [1, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$ の場合。この場合も $U = 3$ は A の上界である。$U = 4$ も A の上界である。上界は一つではない。A の上界が存在するので、A は上に有界である。
3. $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ の場合。A の上界は存在しない！ A は上に有界ではない。

(少しフライングして) 実は上界が存在するときは、上界の最小値が存在する。それを**上限**と呼ぶ。(1), (2) ともに、3 は A の上限である。

図示してみる

授業で描いた図

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/fig-part4.pdf

(少し先走って) 最大値と上限

次の 2 つが成り立つ。

- もし A の最大値が存在すれば、それは A の上限である (後で証明)。
- 一方、A の最大値が存在しないときにも A の上限が存在することがある。
  (例えば $A = [1, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 3\}$ は最大値を持たないが、上限は 3.)

ちょっと変な言い方だけれど、上限の方が最大値よりも存在しやすい。

最大値とは？定義を学ぶ

$A \subset \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ とする。M が A の最大値であるとは？

最大値とは？定義を学ぶ

$A \subset \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ とする。M が A の最大値であるとは？
次の 2 条件が成り立つとき、M は A の最大値であるという。

(i) $(\forall x \in A)\ x \leq M$.

最大値とは？定義を学ぶ

$A \subset \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ とする。M が A の最大値であるとは？
次の 2 条件が成り立つとき、M は A の最大値であるという。

1. (i) $(\forall x \in A)\ x \leq M$.
2. (ii) $M \in A$.

(A の最大値を $\max A$ と表す。 $M = \max A$ ということ。)

$A = \{1, 2, 3\}$, $M = 3$ とするとき、(i), (ii) が成り立つ。

最大値とは？定義を学ぶ

$A \subset \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ とする。M が A の最大値であるとは？
次の 2 条件が成り立つとき、M は A の最大値であるという。

(i) $(\forall x \in A)\ x \leq M$.

(ii) $M \in A$.

(A の最大値を $\max A$ と表す。 $M = \max A$ ということ。)

$A = \{1, 2, 3\}$, $M = 3$ とするとき、(i), (ii) が成り立つ。
($\because$ $x \in A$ とすると、$x = 1$ または $x = 2$ または $x = 3$. いずれも $x \leq 3 = M$ を満たす。また $M = 3 \in A$ が成り立つ。)

$A = [1, 3)$, $M = 3$ とするとき、(i) は成り立つが、(ii) は成り立たない。
(この A の最大値は実は存在しない。)

上限の定義

一言でいうと「上限とは、上界のうちで最小のもの」。

Definition (上限)

$A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ とする。S が A の**上限** (supremum) であるとは、次の (i), (ii) が成り立つことをいう。

(i)
$$(\forall x \in A) \quad x \leq S.$$
(つまり S は A の上界である。)

(ii)
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) \quad S - \varepsilon < x.$$
(つまり S より小さい数は A の上界ではない。)

詳しいことは次回に説明する。

上限の定義

一言でいうと「上限とは、上界のうちで最小のもの」。

Definition (上限)

$A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ とする。S が A の**上限** (supremum) であるとは、次の (i), (ii) が成り立つことをいう。

(i)
$$(\forall x \in A) \quad x \leq S.$$
(つまり S は A の上界である。)

(ii)
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) \quad S - \varepsilon < x.$$
(つまり S より小さい数は A の上界ではない。)

詳しいことは次回に説明する。今日の講義はここまでです。宿題を出す

宿題 1

締め切り 5 月 16 日 (土) 18:00. 今回は締め切り後の提出も認める。
解答を A4 サイズの PDF ファイルにして、Oh-o! Meiji で提出すること。

問題文は
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2020/toi1.pdf
にあります (Oh-o! Meiji のレポート課題 1)。

出題のねらい: 量称記号 $\forall$, $\exists$ を使う練習

PDF ファイルは、どういう方法で作成しても構わない。詳しいことは
「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf

おまけ: LaTeX を使うヒント

LaTeX での PDF 作成にチャレンジする人は少ないだろうけれど、応援しよう、という趣旨。

- $\forall$ は `\forall` と入力する。
- $\exists$ は `\exists` と入力する。
- $\mathbb{R}$ は、`\mathbb{R}` と入力する。これを使うためには、`\begin{document}` の前に

```
\usepackage{amssymb}
```

  と書く必要がある。
- $\land$ は、`\land` または `\wedge` と入力する。
  $\lor$ は、`\lor` または `\vee` と入力する。
- 集合の表現 $A = \{x \mid 1 \le x < 3\}$ に出て来る縦棒 $\mid$ は `\mid` と入力する。長くするのがちょっと難しい。
  http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/tex2019/node22.html