

\_\_年\_\_組\_\_番 氏名\_\_\_\_\_

問 1A  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$  の右側を埋めよ。

- (1)  $A \subset \mathbb{R}, U \in \mathbb{R}$  とする。  $U$  が  $A$  の上界  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
- (2)  $A \subset \mathbb{R}$  とする。  $A$  が上に有界  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
- (3)  $A \subset \mathbb{R}, S \in \mathbb{R}$  とする。  $S$  が  $A$  の上限  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$
- (4)  $A \subset \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$  とする。  $M$  が  $A$  の最大値  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$

問 1B Weierstrass の上限公理を書け。

問 1C  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$  の右側を埋めよ。

- (1)  $A \subset \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$  とする。  $L$  が  $A$  の下界  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
- (2)  $A \subset \mathbb{R}$  とする。  $A$  が下に有界  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$
- (3)  $A \subset \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$  とする。  $I$  が  $A$  の下限  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$
- (4)  $A \subset \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$  とする。  $m$  が  $A$  の最小値  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$

問 1D (Weierstrass の上限公理を認めて) 「 $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  とする。  $A$  は下に有界ならば、  $A$  の下限が存在する。」を証明せよ。

**問 1A**  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$  の右側を埋めよ。

(1)  $A \subset \mathbb{R}, U \in \mathbb{R}$  とする。  $U$  が  $A$  の上界  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A) x \leq U$

(2)  $A \subset \mathbb{R}$  とする。  $A$  が上に有界  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists U \in \mathbb{R})(\forall x \in A) x \leq U$   
(「 $A$  の上界が存在する」でも良い。)

(3)  $A \subset \mathbb{R}, S \in \mathbb{R}$  とする。  $S$  が  $A$  の上限  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A) x \leq S \\ \text{(ii)} & (\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) S - \varepsilon < x \end{cases}$

((ii) は「 $S$  を少しでも小さくすると、 $A$  の上界ではなくなる」)

(4)  $A \subset \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$  とする。  $M$  が  $A$  の最大値  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A) x \leq M \\ \text{(ii)} & M \in A \end{cases}$

**問 1B**  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  とする。  $A$  が上に有界ならば、 $A$  の上限が存在する。

**問 1C**  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$  の右側を埋めよ。

(1)  $A \subset \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$  とする。  $L$  が  $A$  の下界  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A) x \geq L$

(2)  $A \subset \mathbb{R}$  とする。  $A$  が下に有界  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists L \in \mathbb{R})(\forall x \in A) x \geq L$   
(「 $A$  の下界が存在する」でも良い)

(3)  $A \subset \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$  とする。  $I$  が  $A$  の下限  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A) x \geq I \\ \text{(ii)} & (\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) I + \varepsilon > x \end{cases}$

((ii) は「 $I$  を少しでも大きくすると、 $A$  の下界ではなくなる」)

(4)  $A \subset \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$  とする。  $m$  が  $A$  の最小値  $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A) x \geq m \\ \text{(ii)} & m \in A \end{cases}$

**問 1D** 略 (講義ノートには書いてあります。)