2014年度 数学解析 期末試験問題

2014年7月28日(月) 9:00〜10:00施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1. (1) $\mathbb{R}$ の部分集合が上に有界であることの定義を述べよ。

(2) $\mathbb{R}$ の部分集合の上限の定義を述べよ。

(3) 次の (a), (b) いずれか一方の命題を選んで証明せよ。

(a) 「$\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A が下に有界ならば、A は下限を持つ。」(Weierstrass の上限公理を用いて良い。)

(b) 「$\mathbb{R}$ の部分集合 A が最大値 M を持つならば、M は A の上限である。」

2. (1) 数列が無限大に発散することの定義を述べよ。(2) アルキメデスの公理 (原理) を書け。
(3) $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ を証明せよ。

3. (1) $\mathbb{R}$ の区間で定義された実数値関数が連続であることの定義を書け。
(2) 以下の各関数が $\mathbb{R}$ で連続であることを ε-δ 論法で証明せよ。

(a) $c \in \mathbb{R}$ とするとき、$f(x) = c$ $(x \in \mathbb{R})$ で定義される $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) $g(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ で定義される $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(3) 1 変数の多項式関数とは何か説明し、それが $\mathbb{R}$ で連続となる根拠を述べよ。

4. 次のいずれかを証明せよ。(2)〜(5) については、その定理自体も書くこと。
(1) 「上に有界な単調増加数列は収束する。」(2) 区間縮小法の原理 (3) Bolzano-Weierstrass の定理 (4) Weierstrass の最大値定理 (5) Rolle の定理
((2)〜(5) の証明には、それ以前に書かれている定理を用いて良い。(5) を証明する場合、閉区間が閉集合であることを使うならば、その根拠を書くこと。)

5. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = x + 2y$, $g(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} - 1$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ で定め、$N_g := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ とおく。

(1) N_g の概形を描き、N_g は有界であることを示せ。

(2) N_g が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを証明せよ。

(3) f の N_g 上の最大値と最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ。(値を求めるだけでなく、それらが最大値、最小値である根拠を述べること。)