複合機スキャン用紙

宿題 7 (2018/7/9)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番	Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日

(1) 次にあげる $\mathbb{R}^2$ の部分集合について、図示できる場合は図示し、開集合であればそのことを証明し、閉集合であればそのことを証明せよ。

(i) $\mathbb{R}^2$　(ii) $V = \{(0,0),(1,3),(3,2)\}$ (3 点からなる集合)

(iii) $(0,0)$, $(1,3)$, $(3,2)$ を頂点とする三角形の内部 Δ　(iv) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 1\}$

((iii) で「内部」というのは「縁」である三角形の辺を含まない、という意味に取って下さい。)

(2) 集合 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$ は開集合でないことを証明せよ。

問 7 解説　授業で 4 つの定理を学んだ。

- 定理 A (位相の公理, 開集合の性質) (i) $\mathbb{R}^n$ と $\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。(ii) $\mathbb{R}^n$ の任意の開集合族の合併は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。(iii) $\mathbb{R}^n$ の任意の二つの開集合の共通部分は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。
- 定理 B $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続ならば、$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < f(x) < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \gamma\}$ はいずれも $\mathbb{R}^n$ の開集合である。
- 定理 C (閉集合の性質) (i) $\mathbb{R}^n$ と $\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。(ii) $\mathbb{R}^n$ の任意の閉集合族の共通部分は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。(iii) $\mathbb{R}^n$ の任意の二つの閉集合の合併集合 $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。
- 定理 D $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続ならば、$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < f(x) < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \gamma\}$ はいずれも $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(1)　(i) $\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

(∵ 任意の $a \in \mathbb{R}^2$ に対して、$\varepsilon = 1$ とおくと、$\varepsilon > 0$ かつ $B(a;\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$.)

$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。(∵ $(\mathbb{R}^2)^c = \emptyset$ である。任意の a に対して、$a \in \emptyset$ は偽であるから、「$a \in \emptyset \Rightarrow B(a;\varepsilon) \subset \emptyset$」は真である。ゆえに $\emptyset$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。ゆえに $\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。)

(ii) V は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

「1 点 $a \in \mathbb{R}^n$ からなる集合 $\{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である」ことを授業で学んだ (1 つの証明を書いておくと: $f(x) = |x-a|^2$ とすると、これは多項式関数だから $\mathbb{R}^n$ で連続で、$\{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ と表せるので、$\{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。)。それと「2 つの $\mathbb{R}^n$ の閉集合の和集合は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である」という定理 C から、$V = (\{(0,0)\} \cup \{(1,3)\}) \cup \{(3,2)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(iii) Ω は

$$
\begin{aligned}
&\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cap \Omega_3,\\
&\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y - \frac{x}{3} < 0\right\}, \quad \Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y - \frac{3x}{2} < 0\right\},\\
&\Omega_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + 2y < 7\right\}
\end{aligned}
$$

と表される。$y - \frac{x}{3}$, $y - \frac{3x}{2}$, $x + 2y$ は多項式関数なので $\mathbb{R}^2$ で連続であるから (定理 B によって)、Ω_1, Ω_2, Ω_3 は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。ゆえに 3 つの開集合の共通部分である Ω は (定理 A によって) $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

(iv) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := xy$ は多項式関数なので、$\mathbb{R}^2$ で連続であるから Ω は (定理 D によって) $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(2) $a = e = (1,0)$ とおくと、$a \in A$. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$B(a;\varepsilon)$ は A にふくまれない。(実際、$\delta := \min\{\varepsilon/2, 1/2\}$, $b := a - \delta e$ とおくと、$|a-b| = \delta < \varepsilon$ であるから、$b \in B(a;\varepsilon)$. また $1/2 < b_1 = 1 - \delta < 1$ であるから $b \notin A$.) ゆえに A は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。■