複合機スキャン用紙 宿題 6 (2018/6/25 出題, 6/29 16:30 提出)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部		Department 学科				Subject/Teacher 科目/教員名	/				
Class 年・組・番号	Grade 年		Class 組		Number 番		Date 日付	Year 年		Month 月		Day 日

問 6　次式で定義される関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について、(1)〜(4) に答えよ。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & ((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})\\ 0 & ((x,y)=(0,0)).\end{cases}$$

(1) f は $\Omega := \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で連続である。根拠を述べよ (1 行程度で良い)。　(2) f は $(0,0)$ で連続であることを示せ。　(3) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ。　(4) f_x, f_y は $\mathbb{R}^2$ で連続であることを示せ。
(結局、f は $\mathbb{R}^2$ で C^1 級であり、従って $\mathbb{R}^2$ で全微分可能である。)

問 6 解説

(1) $f(x,y)$ は Ω では x と y の有理式に等しく、その分母は Ω で 0 にならないので、f は Ω で連続である。

(2) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy^3}{x^2+y^2} \right| = |xy| \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |xy| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|\,.$$

$(x,y) \to (0,0)$ のとき右辺は 0 に収束するので ($\because$ xy は多項式関数だから連続なので $xy \to 0$)、$f(x,y) \to f(0,0)$.

(3)

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0^3}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0\cdot h^3}{0^2+h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(4) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき (商の微分法を用いて)

$$f_x(x,y) = \frac{y^3(-x^2+y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x\left(3x^2y^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

である。$|-x^2+y^2| \leq |-x^2| + |y^2| = x^2+y^2$ に注意して、$(x,y) \to (0,0)$ のとき

$$|f_x(x,y) - f_x(0,0)| = \left| \frac{y^3(-x^2+y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \right| \leq \frac{|y|^3\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \leq |y| \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |y| \to 0.$$

$$x^2y^2 \leq \frac{1}{2}\left(x^4+y^4\right) \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2, \quad 2x^2y^2+y^4 \leq x^4+2x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2$$

であるから、$(x,y) \to (0,0)$ のとき

$$|f_y(x,y) - f_y(0,0)| = |x| \frac{3x^2y^2+y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} \leq |x| \frac{\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{3}{2}|x| \to 0.$$

ゆえに、f_x と f_y は $(0,0)$ で連続である。 ■

目についた間違い

- (1)「分母・分子が多項式関数で $\mathbb{R}^2$ で連続だから」— これは分母が $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で 0 にならないことを確かめていないからだめ。劣化版「x^2, y^2, xy^3 は連続だから」も当然ダメ。

  (1) の要点は 2 つ。

  (a) 与えられた f について、Ω では、$f(x,y)$ は x と y の有理式

  (b) 「有理関数は分母が 0 にならない範囲を定義域として連続」
  $\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ について、分母が 0 にならない範囲 $= \Omega$

- (2) で $f(r,\theta)$ と書いた人が多いけれど、それはおかしい。$f(r,\theta) = \frac{r\theta^3}{r^2+\theta^2}$ である。$f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と書くべきである。

- (2) で $\lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin\theta = 0$ となる根拠を書かない人が多い。もしも根拠を書かないで良いのならば、そもそも変数変換なんかする必要はなく、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ と書けば良いでしょ？絶対値を取って、大きいもので置き換え、それが 0 に収束することを示す (はさみ打ちの原理)。

$$\left|r^2\cos\theta\sin\theta\right| \le r^2\left|\cos\theta\right|\left|\sin\theta\right| \le r^2\cdot 1\cdot 1 = r^2 \to 0 \quad (r\to 0)$$

  最後のところは、r の多項式 r^2 の連続性である。

- (2) で $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ を言って、だから f が $(0,0)$ で連続と言う人が多いけれど、最後は $f(0,0)$ と書くべきである。

  f が a で連続 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$

  この手の問題で $f(0) = 0$ とすることが多いので、その場合は $= 0$ を示すのが中間目標になるけれど、いつもそうなわけではない。解答を覚えようというやり方をする人はハマりやすいかも。

- $y = kx$ に沿った極限を求めて、それが 0 だから、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ とするのは「こうする人が毎年大勢いるけれど、決してやらないように」と言ったミスである。(単位をあげたくなくなる)

- (3) $f_x(x,y)$ の極限として $f_x(0,0)$ を求めようとするのも大間違い。そうなるかどうかは (4) のテーマである。

定義を覚えて、何を示さないといけないのか理解しないかぎり、得点するのは難しいだろう。

丸暗記しようなどと考えないこと。見た目が似ていても、まったく異なる問題を作ることが出来る。式を少し変えることで、f_x と f_y は $(0,0)$ で存在するが連続ではないようにすることが出来る。さらに f は $(0,0)$ で全微分可能であるようにも、$(0,0)$ で全微分可能でないようにも出来る。