複合機スキャン用紙

宿題 5

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	

Department 所属	Faculty 学部	Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組 Number 番	Date 日付	Year 年 Month 月 Day 日

問 5　(2018/6/11 出題, 6/15 16:00 提出)

(1) $\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{x^2+4} \\ \sin(x+2y) \end{pmatrix}$ で定まる関数 $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ で連続であることを示せ。

(2) 次の極限が存在するかどうか調べ、存在する場合はそれを求めよ。簡単で良いので根拠を書くこと。

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \begin{pmatrix} x^3-3xy^2 \\ 3x^2y-y^3 \end{pmatrix}$　(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y}{x+2y}$　(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$

問 5 解説

(1) $f_1(x,y) := \dfrac{3}{x^2+4}$, $f_2(x,y) := \sin(x+2y)$ はともに $\mathbb{R}^2$ 上定義された連続関数である。実際

- f_1 は有理関数である。定義域は $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+4\neq 0\} = \mathbb{R}^2$. ゆえに f_1 は $\mathbb{R}^2$ 全体で連続である。
- $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x+2y$ は 2 変数の多項式関数であるから $\mathbb{R}^2$ で連続である。$G\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(z) = \sin z$ は $\mathbb{R}$ で連続である。合成関数 $G\circ F$ が f_2 である。ゆえに f_2 は $\mathbb{R}^2$ で連続である。

ゆえに $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ で連続である。 ■

(2) (i) $f_1(x,y) := x^3 - 3xy^2$, $f_2(x,y) := 3x^2y - y^3$ はともに 2 変数の多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ で連続であるから、$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ も $\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \begin{pmatrix} x^3-3xy^2 \\ 3x^2y-y^3 \end{pmatrix} = \lim_{(x,y)\to(2,3)} \boldsymbol{f}(x,y) = \boldsymbol{f}(2,3) = \begin{pmatrix} 2^3 - 3\cdot 2\cdot 3^2 \\ 3\cdot 2^2\cdot 3 - 3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(ii) 実数 $k \neq -\frac{1}{2}$ に対して

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{2x-y}{x+2y} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-kx}{x+2\cdot kx} = \lim_{x\to 0}\frac{2-k}{1+2k} = \frac{2-k}{1+2k}.$$

この値は k に依存するので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y}{x+2y}$ は存在しない。

(iii) 任意の実数 k に対して

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{\sqrt{x^2+(kx)^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{|x|\sqrt{1+k^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{k|x|}{\sqrt{1+k^2}} = 0.$$

ゆえに極限が存在するならば 0 である。任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ に対して

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x|\sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \le |x|\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = |x|.$$

$(x,y)\to(0,0)$ のとき、右辺 $\to 0$ であるから、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

(iv) $y = kx$ $(k\neq -1)$ とすると

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x+kx} = \lim_{x\to 0}\frac{kx}{1+k} = \frac{k\cdot 0}{1+k} = 0 \quad (\text{多項式関数の連続性}).$$

ゆえに、もしも極限が存在するならば、それは 0 以外にはありえない。しかし

$$\left|\frac{xy}{x+y} - 0\right| = \frac{|xy|}{|x+y|}$$

は $(x,y)\to(0,0)$ としても 0 には収束しない。(実際、極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いると、$(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow r\to 0$ であるが、

$$\left|\frac{xy}{x+y}\right| = \left|\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right| = \left|\frac{r\cdot\frac{1}{2}\sin(2\theta)}{\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)}\right| = \frac{r}{2\sqrt{2}}\cdot\left|\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta+\pi/4)}\right|.$$

例えば、$\theta + \pi/4 = r$ という関係を保ったまま $r\to 0$ とするとき、$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ に収束する。) ゆえに極限は存在しない。 ■