

複合機スキャン用紙 宿題 4 (2018/5/28 出題, 6/1 16:00 提出)



・ 学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。  
 ・ 文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score  
採点結果

--	--	--

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科				Subject/Teacher 科目/教員名			/			
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番	Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日					

問 4 (1)  $I$  は  $\mathbb{R}$  の区間、 $a \in \bar{I}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}$  とする。 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が  $A$  に収束するとはどういうことか(定義を書け)。

(2)  $f(x) = -3x + 4$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) とするとき、 $(\forall a \in \mathbb{R}) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  が成り立つことを示せ(ただし 5/28 の定理は使わず、極限の定義の条件を満たすことを確認して証明すること)。

(3) (1) が成り立つとき、 $a$  の十分近くで、 $f$  が有界である、すなわち

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad |f(x)| \leq M$$

が成り立つことを示せ(「収束列は有界」という定理の証明が1つのヒント)。

#### 問4 解説

$$(1) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in I: |x - a| < \delta) |f(x) - A| < \varepsilon$$

(2)  $\varepsilon$  を任意の正の数とする。  $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$  とおくと、  $\delta > 0$ 。そして  $|x - a| < \delta$  を満たす任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して、

$$|f(x) - f(a)| = |(-3x + 4) - (-3a + 4)| = |-3(x - a)| = |-3||x - a| = 3|x - a| < 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ゆえに

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

ゆえに  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

(3)  $x \rightarrow a$  のとき  $f(x) \rightarrow f(a)$  であるから、ある正の数  $\delta$  が存在して、  $|x - a| < \delta$  を満たす任意の  $x \in I$  に対して、

$$|f(x) - f(a)| < 1.$$

ゆえに

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| < 1 + |f(a)|.$$

ゆえに  $M := |f(a)| + 1$  とおくと、

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in I: |x - a| < \delta) \quad |f(x)| \leq M$$

が成り立つことが示された。 ■