複合機スキャン用紙

宿題 3

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	

Department 所属	Faculty 学部 Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年 Class 組 Number 番	Date 日付	Year 年 Month 月 Day 日

問 3　(2018 年 5 月 14 日出題, 裏面利用可能)

(1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列, $a \in \mathbb{R}$ とするとき、次の条件 (a) と (b) を論理式で表せ。

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は a に収束する。　(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は a に収束しない。(否定記号 $\neg$ を用いずに表すこと。)

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が、それぞれ $a, b \in \mathbb{R}$ に収束するとき、次の (i) と (ii) を示せ。

(i) $\{-3a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $-3a$ に収束する。　(ii) $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $a - b$ に収束する。

問 3 解説

(1) (a) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ |a - a_n| < \varepsilon$

(b) $(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ |a - a_n| \geq \varepsilon$

(2) (a) ε を任意の正の数とする。$\{a_n\}$ が a に収束するので、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

このとき

$$|-3a_n - (-3a)| = |-3(a_n - a)| = |-3|\,|a_n - 3| = 3\,|a_n - a| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ゆえに

$$|-3a_n - (-3a)| < \varepsilon.$$

ゆえに $\{-3a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $-3a$ に収束する。

(b) ε を任意の正の数とする。$\{a_n\}$ が a に収束するので、ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して、$n \geq N_1$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{$\sharp$}$$

一方、$\{b_n\}$ が b に収束するので、ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して、$n \geq N_2$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{$\flat$}$$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$N \in \mathbb{N}$ であり、$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$n \geq N_1$ かつ $n \geq N_2$ であるから $(\sharp)$, $(\flat)$ ともに成り立つ。ゆえに

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| = |(a_n - a) - (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |-(b_n - b)| = |a_n - a| + |b_n - n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ゆえに

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| < \varepsilon.$$

ゆえに $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $a - b$ に収束する。 ■