

数学解析 定義&定理確認

桂田 祐史

2014年7月14日, 2018年4月15日

p. 4 から解答があります。

定義(全部)や定理(大事なもの)を書けるようにしておいて下さい。自分で定義を書いて、解答を見てチェックして下さい。

例えば「数列の収束の定義を述べよ」という問に対して、

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) |a_n - a| < \varepsilon$$

とだけ書くのではなく、最低でも「 $\{a_n\}$ が a に収束するとは」を書くべきで、完全にするためには「 $\{a_n\}$ を数列、 $a \in \mathbb{R}$ とする。」のような前振りも必要です。

良く使う記号

1. 次の記号の意味を説明せよ。

(1) \mathbb{N} (2) \mathbb{Z} (3) \mathbb{Q} (4) \mathbb{R} (5) \mathbb{C}

2. 次の (1)~(9) は \mathbb{R} の区間である。それらを $[\]$, $(\)$ を用いずに表せ。(10) は記号の使い方がおかしいが、その理由を記せ。

(1) $[1, 2]$ (2) $(1, 2)$ (3) $[1, 2)$ (4) $(1, 2]$ (5) $(1, \infty)$ (6) $[1, \infty)$ (7) $(-\infty, 2]$ (8) $(-\infty, 2)$ (9) $(-\infty, \infty)$ (10) $[1, \infty]$

良く出て来る用語 $\square\square$ の定義の述べ方。「 $\bigcirc\bigcirc$ は $\triangle\triangle$ とする。 $\bigcirc\bigcirc$ が $\square\square$ であるとは、 $\sim\sim$ が成り立つことをいう。」「 $\bigcirc\bigcirc$ は $\triangle\triangle$ とする。 $\sim\sim$ が成り立つとき、かつそのときに限り、 $\bigcirc\bigcirc$ は $\square\square$ であるという。」のような言い回しを身につけること。

3. 次の用語の定義を述べよ。

(1) (\mathbb{R} の部分集合が) 上に有界 (2) (\mathbb{R} の部分集合が) 下に有界 (3) (\mathbb{R} の部分集合の) 上界 (4) (\mathbb{R} の部分集合の) 下界 (5) (\mathbb{R} の部分集合の) 上限 (6) (\mathbb{R} の部分集合の) 下限 (7) (\mathbb{R} の部分集合が) 有界 (8) (\mathbb{R} の部分集合の) 最大値 (9) (\mathbb{R} の部分集合の) 最小値

4. 次の用語の定義を述べよ。

(1) (数列が) 収束する (2) (数列が) 上に有界 (3) (数列が) 有界 (4) (数列が) 単調増加 (5) (数列が) 狭義単調増加 (6) (数列が) 無限大に発散する (7) (数列の) 部分列 (8) $A \subset \mathbb{R}$ とするとき、 A 内の数列

5. 次の用語の定義を述べよ。

(1) (\mathbb{R}^n の点列が) 収束する (2) (\mathbb{R}^n の点列が) 有界 (3) (\mathbb{R}^n の点列の) 部分列 (4) $A \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、 A 内の点列

6. 次の用語・記号の定義を述べよ。

(1) (関数 f が変数 x をある値に近付けるときに) 収束する (2) (関数 f が) 連続 (3) (変数 x についての) 多項式 (4) $\mathbb{R}[x]$ (5) (変数 x についての) 有理式 (6) (関数 f が変数 x をある値に近付けるときに) 無限大に発散する (7) (関数 f が変数 x を ∞ に近付けるときに) 収束する (8) (関数 f が変数 x を ∞ に近付けるときに) 無限大に発散する

(多変数ベクトル値関数についても、ほぼ同様なので、もう繰り返さない。)

7. 次の用語の定義を述べよ。

(1) (\mathbb{R}^n の部分集合 A が) \mathbb{R}^n の開集合 (2) (\mathbb{R}^n の部分集合 A が) \mathbb{R}^n の閉集合 (3) (\mathbb{R}^n の部分集合 A の) 閉包 (記号だけ覚えている人のため: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対する $\bar{\Omega}$ を Ω の閉包という。)

大事な定理

8. 次の公理、定理を書け (言うまでもないことだが、いずれも命題である)。

- (1) Weierstrass の上限公理
- (2) 上に有界な単調増加数列の収束
- (3) アルキメデスの原理 (公理)
- (4) (Cantor の) 区間縮小法
- (5) Bolzano-Weierstrass の定理
- (6) Weierstrass の最大値定理
- (7) Rolle の定理
- (8) 平均値の定理

以上の8つの命題のうち、この講義で証明していないものはどれか。またこれらの命題の相互関係を述べよ (授業では芋づる式に証明したが、どういう順番でつながっているか)。

9. (1) \mathbb{R}^n の開集合について、「位相の公理」と呼ばれる定理を書け。(2) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < f(x) < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \gamma\}$ が \mathbb{R}^n の開集合であるためには、 f に何を仮定すれば良いか (答はただ一つに限らないが、授業で紹介した定理ではどうなっているか)。

10. 次の定理を書け。

- (1) 逆関数定理 (2) 陰関数定理 (3) Lagrange の未定乗数法

∞ . 問 3~10 について、それぞれ例をあげよ。

「定義を書け」という問題でよくある答案へのツツコミ

例えば「 \mathbb{R}^n の開集合の定義を書け」という問題に対して、次のような 1 行答案がある。

$$(\forall x \in \Omega) (\exists \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \subset \Omega.$$

これは実は突っ込みどころ満載で、バツにはしないかもしれないが、とても満点はあげられない。

- 登場人物である Ω の紹介がない。「 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。」などの前フリが必要である。
- 何が \mathbb{R}^n の開集合であるのか書く必要がある。つまり「 Ω が \mathbb{R}^n の開集合」というフレーズか、それと同等のものが必要である。**主語を書きなさい** と言っておく。

定義を書くためには、「 \bigcirc が \square であるとは、 \triangle が成り立つことをいう」のような、普段はあまり使わない独特の言い回しが必要になる。それを使うのが嫌なのか、例えば次のように書く答案がある。

$$\text{「}\Omega \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の開集合ならば、} (\forall x \in \Omega) (\exists \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \subset \Omega.\text{」}$$

$$\text{「}\Omega \text{ を } \mathbb{R}^n \text{ の開集合とすると、} (\forall x \in \Omega) (\exists \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \subset \Omega.\text{」}$$

どちらも 100% 正しい主張であるが、定義にはなっていない。記号化すると

$$\Omega \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の開集合} \Rightarrow ((\forall x \in \Omega) (\exists \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \subset \Omega)$$

となるだろうが、一方向 \Rightarrow であるのが非常にまずい。定義するときは、**両方向** \Leftrightarrow である。(つまり、この条件を満たす以外に、 \mathbb{R}^n の開集合というものはない、ということを明言する必要がある。)

そこで次のような表現を使う場合がある。

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。 $(\forall x \in \Omega) (\exists \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つとき、かつそのときに限り、 Ω は \mathbb{R}^n の開集合であるという。

こう書いてもらおうと満点に出来るが、最近はこの「 $\bigcirc\bigcirc$ が成り立つとき、かつそのときに限り～」という表現を使う人が (数学書の中でも) 減ったような気がする。何となくいかめしい?

この講義で採用している表現を使うと、

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。 Ω が \mathbb{R}^n の開集合であるとは、 $(\forall x \in \Omega) (\exists \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つことをいう。

となる。

解答

1. (1) \mathbb{N} は自然数全体の集合 (2) \mathbb{Z} は整数全体の集合 (3) \mathbb{Q} は有理数全体の集合 (4) \mathbb{R} は実数全体の集合 (5) \mathbb{C} は複素数全体の集合

2. (1) $[1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ (2) $(1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$ (3) $[1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$
(4) $(1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$ (5) $(1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x\}$ (6) $[1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x\}$ (7) $(-\infty, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ (8) $(-\infty, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ (9) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ (10) 実数と ∞ は等しくならないから。

3.

(1) $A \subset \mathbb{R}$ とする。 A が上に有界であるとは、 $(\exists U \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) x \leq U$ が成り立つことをいう。

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。 A が下に有界であるとは、 $(\exists L \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) L \leq x$ が成り立つことをいう。

(3) $A \subset \mathbb{R}, U \in \mathbb{R}$ とする。 U が A の上界であるとは、 $(\forall x \in A) x \leq U$ が成り立つことをいう。

(4) $A \subset \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ とする。 L が A の下界であるとは、 $(\forall x \in A) L \leq x$ が成り立つことをいう。

(5) $A \subset \mathbb{R}, S \in \mathbb{R}$ とする。 S が A の上限であるとは、次の2条件が成り立つことをいう。

(a) S は A の上界 (b) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) S - \varepsilon < x$

(別解「 A の上界全体の集合の最小値を A の上限という。」もあるが、証明に使うときは上の書き方が便利。)

(6) $A \subset \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$ とする。 I が A の下限であるとは、次の2条件が成り立つことをいう。

(a) I は A の下界 (b) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) x < I + \varepsilon$

(別解「 A の下界全体の集合の最大値を A の下限という。」もあるが、証明に使うときは上の書き方が便利。)

(7) $A \subset \mathbb{R}$ とする。 A が有界であるとは、 $(\exists R \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) |x| \leq R$ が成り立つことをいう。

(8) $A \subset \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$ とする。 M が A の最大値であるとは、 $M \in A$ かつ $(\forall x \in A) x \leq M$ が成り立つことをいう。

(9) $A \subset \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$ とする。 m が A の最小値であるとは、 $m \in A$ かつ $(\forall x \in A) m \leq x$ が成り立つことをいう。

4. 当たり前であるが、(1) が重要 (この講義の理解には必要不可欠)。

(1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列, $a \in \mathbb{R}$ とする。 $\{a_n\}$ が a に収束するとは、 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) |a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ と表す。

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が上に有界とは、 $(\exists U \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq U$ が成り立つことをいう。

(注: 言い換えると集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が \mathbb{R} の上に有界な部分集合である、ということである。)

(3) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界とは、 $(\exists R \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq R$ が成り立つことをいう。

(4) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が単調増加であるとは、 $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つことをいう。

- (5) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が狭義単調増加であるとは、 $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n < a_{n+1}$ が成り立つことをいう。
- (6) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が ∞ に発散するとは、 $(\forall U \in \mathbb{R}) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) a_n \geq U$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ と表す。
- (7) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を数列とする。 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の部分列であるとは、数列 $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ で、 $(\forall k \in \mathbb{N}) n_k \in \mathbb{N} \wedge n_{k+1} > n_k$ を満たすものが存在して、 $(\forall k \in \mathbb{N}) b_k = a_{n_k}$ が成り立つことをいう。
- (8) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が数列、 $A \subset \mathbb{R}$ とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が A 内の数列であるとは、 $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \in A$ が成り立つことをいう。

5. 数列とほとんど同じである (それを見せるために、あえて書いた)。

- (1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R}^n の点列、 $a \in \mathbb{R}^n$ とする。 $\{a_n\}$ が a に収束するとは、 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) |a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ と表す。
- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R}^n の点列とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界とは、 $(\exists R \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq R$ が成り立つことをいう。
- (3) 4. の (7) の中の「数列」を「点列」で置き換えれば良い。
- (4) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が点列、 $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が A 内の点列であるとは、 $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \in A$ が成り立つことをいう。

6. (1), (2) は非常に重要で、この講義の理解には必要不可欠。典型的な連続関数として、多項式関数、有理関数 (ただし分母が 0 でない、定義域の範囲で) は重要なので、きちんと認識できるため、(3), (4) はマスターしないとマズい。

- (1) $\Omega \subset \mathbb{R}, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a \in \overline{\Omega}, A \in \mathbb{R}$ とする。 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が A に収束するとは、 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \Omega: |x - a| < \delta) |f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ と表す。
- (2) $\Omega \subset \mathbb{R}, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a \in \Omega$ とする。 f が a で連続であるとは、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つことをいう。
- (3) ある自然数 n と $n+1$ 個の実数 a_0, a_1, \dots, a_n を用いて、 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ と表せる x の式を x の (実係数) 多項式と呼ぶ。
- (4) x の実係数多項式全体の集合を $\mathbb{R}[x]$ と表す。言い換えると、

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ p(x) \mid (\exists n \in \mathbb{N}) (\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}) p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j} \right\}.$$

- (5) $r(x)$ が x についての実係数有理式であるとは、実係数多項式 $p(x), q(x)$ が存在して $r(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$ が成り立つことをいう。
(高校流で説明すると、分母分子が整式である分数式のこと。)
- (6) $\Omega \subset \mathbb{R}, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a \in \overline{\Omega}$ とする。 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が ∞ に発散するとは、 $(\forall U \in \mathbb{R}) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \Omega: |x - a| < \delta) f(x) > U$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ と表す。

- (7) $\Omega \subset \mathbb{R}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ とする。 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ が A に収束するとは、 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists U \in \mathbb{R}) (\forall x \in \Omega: x > U) |f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ と表す。
- (8) $\Omega \subset \mathbb{R}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ が ∞ に収束するとは、 $(\forall U \in \mathbb{R}) (\exists U' \in \mathbb{R}) (\forall x \in \Omega: x > U') f(x) > U$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ と表す。

7.

- (1) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。 A が \mathbb{R}^n の開集合であるとは、 $(\forall x \in A) (\exists \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \subset A$ が成り立つことをいう。ただし $B(x; \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \varepsilon\}$.
- (2) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。 A が \mathbb{R}^n の閉集合であるとは、 A の補集合が \mathbb{R}^n の開集合であることをいう。ただし A の補集合とは、 $A^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}$ のことをさす。
- (3) $A \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、 $\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$ を A の閉包と呼ぶ。ただし $B(x; \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \varepsilon\}$.

8.

- (1) $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界かつ、空集合でないならば、 A の上限が存在する。
- (2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が上に有界かつ単調増加な数列であるならば、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ が成り立つ。
- (3) $(\forall a > 0) (\forall b > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) na > b$.
- (4) $I_n = [a_n, b_n]$ ($n \in \mathbb{N}$) が減少する \mathbb{R} の閉区間 ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n < b_n$, $I_{n+1} \subset I_n$) ならば $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.
特に $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ ならば、 $(\exists c \in \mathbb{R}) \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$.
- (5) $\{a_n\}$ は \mathbb{R}^n の点列で、有界ならば、 $\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち各項が自然数である狭義単調増加な数列 $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ と、 $a \in \mathbb{R}$ が存在して $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ が成り立つ。
- (6) K は \mathbb{R}^n の有界な閉集合で、 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とすると、 f は K で最大値を持つ (f の値域 $f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$ の最大値が存在する)。すなわち $(\exists a \in K) (\forall x \in K) f(a) \geq f(x)$.
- (7) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続で、 $f(a) = f(b)$, f は (a, b) で微分可能ならば、 $(\exists c \in (a, b)) f'(c) = 0$.
- (8) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が連続で、 f は (a, b) で微分可能ならば、 $(\exists c \in (a, b)) f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

9. (1) (a) \emptyset と \mathbb{R}^n は \mathbb{R}^n の開集合である。(b) 集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が、 $(\forall \lambda \in \Lambda) U_\lambda$ は \mathbb{R}^n の開集合、を満たすならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は \mathbb{R}^n の開集合である。(c) U_1 と U_2 が \mathbb{R}^n の開集合ならば、 $U_1 \cap U_2$ も \mathbb{R}^n の開集合である。(2) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が連続であること。

この 9 の閉集合版も重要である。(1) では、「開集合」を「閉集合」に、 \cup を \cap に、 \cap を \cup に変える。(2) では、「開集合」を「閉集合」に、 $<$ を \leq に、 $>$ を \geq に、 \neq を $=$ に変える。

10. 講義ノートの付録 D 節に「陰関数定理を覚える」という説明を書いている (pp. 126 辺り)。

(1) (逆関数定理) Ω は \mathbb{R}^n の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ は C^1 級、 $a \in \Omega$, $\det f'(a) \neq 0$ ならば、 $(\exists U: a$ を含む開集合) $(\exists V: b = f(a)$ を含む開集合) $\tilde{f} = f|_U: U \rightarrow V$ を $\tilde{f}(x) = f(x)$ ($x \in U$) で定めると \tilde{f} は全単射で、逆関数 $\tilde{f}^{-1}: V \rightarrow U$ も C^1 級である。

(2) (陰関数定理) Ω は $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ の開集合、 $F: \Omega \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}^n$ は C^1 級、 $(a, b) \in \Omega$, $F(a, b) = 0$, $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ が成り立つとする。このとき、 a を含む \mathbb{R}^m の開集合 U , b を含む \mathbb{R}^n の開集合 V , C^1 級の関数 $\varphi: U \rightarrow V$ で、以下の (i)–(iv) を満たすものが存在する。

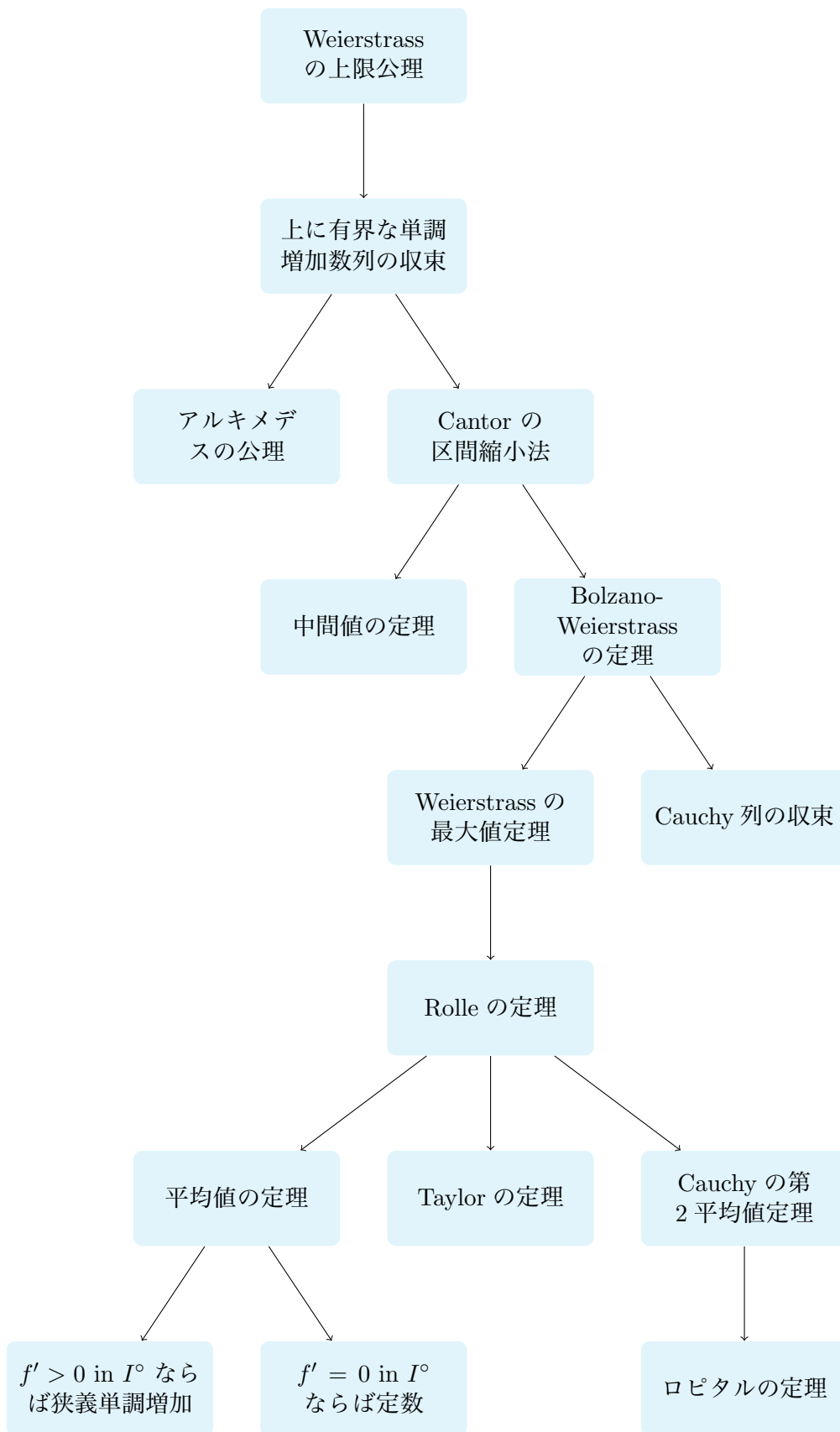
(i) $U \times V \subset \Omega$.

(ii) $\forall (x, y) \in U \times V$ について、 $F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$.

(iii) $\varphi(a) = b$.

(iv) $\forall x \in U$ について、 $\varphi'(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))$.

(実は (iii) は仮定 $F(a, b) = 0$ と (ii) から出るし、(iv) も後から合成関数の微分をするだけで出せるので、絶対に必要なのは (i) と (ii) だけである。)



最初の Weierstrass の上限公理のみ証明していない(それもあって「公理」と呼んでいる。)