

2018年度 数学解析 期末試験問題

2018年7月30日(月曜) 9:30~10:30 施行

担当 桂田 祐史

ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1と8は必ず解答せよ。2~7のうちから3題以上選択して解答せよ。(採点して得点の高い方から3つの得点を選ぶ。)

1. (1) Weierstrass の上限公理を書け。(2) \mathbb{R} の部分集合が下に有界であるとはどういうことか、定義を書け。(3) \mathbb{R} の部分集合の下限の定義を書け。(4) \mathbb{R} の部分集合 A が空集合ではなく、下に有界であるとするとき、 A の下限が存在することを示せ。

2. 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がそれぞれ a, b に収束するとする。(1) 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が有界であることを証明せよ。(2) 数列 $\{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が ab に収束することを証明せよ。

3. 次の(A), (B) のどちらかを選んで解答せよ。

(A) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ について、以下の問に答えよ。(1) A の上限を求めよ。上限である理由も書け。(2) A の下限を求めよ。下限である理由も書け。

(B) (1) 実数列が ∞ に発散するとはどういうことか、定義を述べよ。(2) アルキメデスの公理を書け。(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ であることを示せ。

4. (1) I は \mathbb{R} の区間、 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 f が I で連続であるとはどういうことか、 ε - δ 論法による定義を書け。(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + \log 3$ で定めた f が \mathbb{R} で連続であることを((1)に書いた)定義に基づき証明せよ。(3) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ で定めた f が $(0, \infty)$ で連続であることを定義に基づき証明せよ。

5. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 + xy^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\ 1 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$ で定めるとき、

以下の問に答えよ。(1) f が $(0, 0)$ で連続であるかどうか調べよ。(2) f が $(0, 0)$ で偏微分可能であるかどうか調べよ。(3) f が $(0, 0)$ で全微分可能であるかどうか調べよ。

6. (1) \mathbb{R}^n の開集合、 \mathbb{R}^n の閉集合の定義を述べよ。(2) A と B が \mathbb{R}^n の開集合であるとき、 $A \cup B$ と $A \cap B$ も \mathbb{R}^n の開集合であることを定義に従い証明せよ。(3) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が連続であるとき、 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$ は \mathbb{R}^n の開集合であることを、定義に基づき証明せよ。

7. 講義で学んだ定理のうち、極限に関するものを自分で1つ選び、その定理を書いた後、証明せよ。その証明の中で別の定理を用いる場合は、その定理を書くこと(その証明はしなくて良い)。

8. (1) \mathbb{R}^n の部分集合が有界であるとはどういうことか、定義を書け。

(2) 多変数関数に関する Weierstrass の最大値定理を書け。

(3) $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $f: K \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = xy - yz + zx$ とするとき、 f の K における最大値が存在することを Weierstrass の最大値定理を用いて証明せよ。

(あまり時間がさけないので、ところどころ省略。)
ちなみに 1 と 8 の配点は大きめで、他はみな同じです。

1 解説

- (1) A が \mathbb{R} の上に有界かつ空でない部分集合ならば、 A の上限が存在する。
(言い換え) $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A は上に有界 $\Rightarrow A$ の上限が存在する。
(言い換え) 空でない、上に有界な \mathbb{R} の部分集合は上限を持つ。

- (2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。 A が下に有界とは

$$(\exists L \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \geq L$$

が成り立つことをいう。

- (3) $A \subset \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$ とする。 I が A の下限であるとは、次の 2 つの条件を満たすことをいう。

- (i) $(\forall x \in A) \quad x \geq I$.
(ii) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) \quad x < I + \varepsilon$.

- (4) (略: 2015 年度の期末試験 問 1 が参考になります。)

2 解説

- (1) $\{a_n\}$ が a に収束するので、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < 1$$

が成り立つ。このとき (きちんと言うと「 $n \geq N$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ に対して」)

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

であるので

$$M := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$$

とおくと、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |a_n| \leq M$$

が成り立つ。ゆえに $\{a_n\}$ は有界である。

- (2) (1) で調べたように $|a_n| \leq M$ ($n \in \mathbb{N}$) を満たす M が存在する。

ε を任意の正の数とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ であるから、ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1) \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ であるから、ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2) \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)}.$$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、 $N \in \mathbb{N}$ であり、 $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)} + \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} \cdot |b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$. ■

3A 解説 (1) A は最大値 1 を持つ。一般に「最大値は上限である」から、1 は A の上限である。(2) A の下限は 0 である。実際

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $\frac{1}{n} > 0$ であるから、

$$(\forall x \in A) \quad x \geq 0.$$

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、アルキメデスの公理から、ある自然数 n が存在して、 $n\varepsilon > 1$ 。ゆえに $\varepsilon > \frac{1}{n}$ であるから、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) \quad 0 + \varepsilon > x.$$

($x = 1/n$ とすればよい)。

これは宿題問 2 の類題である。その解答

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2018/toi2-answers.pdf>

も合わせて見ると良いかも。■

3B 解説 (1) $(\forall U \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) a_n > U$. (2) $(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) na > b$. (3) 任意の $U \in \mathbb{R}$ に対して、 $b := |U| + 1$ とおくと、 $b > 0$ であるから、アルキメデスの公理によって、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $N \cdot 1 > b$ 。ゆえに

$$N > b = |U| + 1 > |U| \geq U.$$

$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n^2 \geq N^2 \geq N > U.$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$. ■

4 解説

(1) $(\forall a \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I: |x - a| < \delta) |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(2) a は I の任意の要素とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ とおくと、 $\delta > 0$ 。そして $|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して、

$$|f(x) - f(a)| = |(-2x + \log 3) - (-2a + \log 3)| = |-2(x - a)| = |-2| \cdot |x - a| = 2|x - a| < 2\delta = \varepsilon.$$

ゆえに f は I で連続である。

(3) (略)

5 解説

(1) $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき、 $f(x, y) - f(0, 0)$ が 0 に収束するかどうかを調べれば良い。

$(x, y) \neq (0, 0)$ とするとき、

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{x^3 + x^2 + xy^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{x^3 + xy^2 + xy}{x^2 + y^2}.$$

k を任意の実数として、 $y = kx$ に沿った極限を調べてみる。

$$(\heartsuit) \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{x^3 + xy^2 + xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^3 x^3 + k^2 x^3 + kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^3 x + k^2 x + k}{1 + k^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

もしも $f(x, y) - f(0, 0) \rightarrow 0$ であれば、これが 0 になるはずだが、そうではないので、

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x, y) - f(0, 0))$ は 0 ではない。ゆえに f は $(0, 0)$ で連続ではない。(証明終)

色々な別解がある。(♡) を出した直後に、「この値は k に依存するので、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x, y) - f(0, 0))$ は存在しない。ゆえに f は $(0, 0)$ で連続でない。」というのもある。

(2)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 + h^2}{h^2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

であるから $f_x(0, 0) = 1$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{h^2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

であるから $f_y(0, 0) = 0$. $(0, 0)$ における偏微分係数が存在することが分かった。ゆえに f は $(0, 0)$ で偏微分可能である。

(3) 一般に f が $(0, 0)$ で全微分可能であれば連続であるが、 f は $(0, 0)$ で連続でないことが分かったので、 f は $(0, 0)$ で全微分可能ではない。■

注意 極座標を使うとどうなるか尋ねられた。この場合は特に分かりやすくなるということもない。

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(0, 0) &= \frac{(r \cos \theta)^3 + (r \cos \theta)(r \sin \theta)^2 + r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{r^2} = \frac{r^3 \cos \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \\ &= r \cos \theta + \cos \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

この式の $r \rightarrow 0$ のときの極限、というとき少し意味が曖昧である。少なくともふた通りの解釈が出来る。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x, y) - f(0, 0)) = \lim_{r \rightarrow 0} (f(r \cos \theta, r \sin \theta) - 1) = \lim_{r \rightarrow 0} (r \cos \theta + \cos \theta \sin \theta)$$

とする場合は「 θ が何であっても」ということになり、「極限なし」が結論である。

一方で、 θ を任意の値に固定しておいて、 r のみ、 $r \rightarrow 0$ とするということであれば (これは k を任意の与えて、 $y = kx$ に沿う極限を求めることに近い)

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r \cos \theta + \cos \theta \sin \theta) = \cos \theta \sin \theta \quad (\text{この式を説明抜きで書いた人も多いが、問題含み})$$

である。「この値が θ に依存するので、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x, y) - f(0, 0))$ は存在しない」という説明をすることになるだろう。

つなげて

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x, y) - f(0, 0)) = \lim_{r \rightarrow 0} (f(r \cos \theta, r \sin \theta) - 1) = \cos \theta \sin \theta$$

と書くのは間違いとすべきだろう。■

6 解説

(1) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。 A が \mathbb{R}^n の開集合であるとは、

$$(\forall x \in A)(\exists \varepsilon > 0) \quad B(x; \varepsilon) \subset A$$

が成り立つことをいう。ただし、 $B(x; \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \varepsilon\}$.

また、 A が \mathbb{R}^n の閉集合であるとは、 A の補集合 A^c が \mathbb{R}^n の開集合であることをいう。
(念のため) $A^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}$.

(2) $A \cup B$ が \mathbb{R}^n の開集合であること。任意の $x \in A \cup B$ に対して、 $x \in A$ または $x \in B$.

$x \in A$ のとき、 A が \mathbb{R}^n の開集合であることから、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B(x; \varepsilon) \subset A$. ゆえに $B(x; \varepsilon) \subset A \cup B$.

$x \in B$ のとき、 B が \mathbb{R}^n の開集合であることから、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B(x; \varepsilon) \subset B$. ゆえに $B(x; \varepsilon) \subset A \cup B$.

いずれの場合も

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad B(x; \varepsilon) \subset A \cup B$$

が成り立つ。ゆえに $A \cup B$ は \mathbb{R}^n の開集合である。

$A \cap B$ が \mathbb{R}^n の開集合であること。これは授業で定理として証明したので省略。

(3) (省略。本質的には授業で定理として証明した。) ■

7 解説 この問題、サービス問題のつもりなんだけれど、今年度は案外選択する人が少なく、選択した人もきちんと得点できた人は少ない (途中で放り出す感じの解答が結構多い)。追試では出題しないかもしれません。

8 解説

(1) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。 A が有界とは

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad |x| \leq R$$

が成り立つことをいう。

(2) K が \mathbb{R}^n の有界な閉集合、 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とすると、 f の K における最大値が存在する。

(3) $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ で定まる g は、多項式関数であるから、 \mathbb{R}^3 で連続である。ゆえに $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 1\}$ は \mathbb{R}^3 の閉集合である。

また $(x, y, z) \in K$ とするとき、

$$|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad |(x, y, z)| \leq 1$$

であるから、 K は有界である。

一方、 $xy - yz + zx$ は多項式であるから、関数として \mathbb{R}^3 全体で連続となるので、(それを K に制限した) f も K で連続である。

まとめると、 K は \mathbb{R}^3 の有界閉集合であり、 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であるから、Weierstrass の最大値定理によって、 f の K における最大値が存在することが分かる。 ■