2017 年度 数学解析 期末試験問題

2017 年 7 月 28 日 (金曜) 9:30〜10:30 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1 と **7** は必ず解答せよ。**2**〜**6** のうちから 3 題以上選択して解答せよ。(採点して得点の高い方から 3 つの得点を選ぶ。)

1. (1) $\mathbb{R}$ の部分集合が上に有界であるとはどういうことか、定義を書け。

(2) $\mathbb{R}$ の部分集合の上限の定義を書け。

(3) Weierstrass の上限公理を書け。

(4) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \le x < 28\}$ の上限が 28 であることを示せ。

2. (1) 実数列が実数に収束するとはどういうことか、定義を述べよ。

(2) アルキメデスの公理 (原理) を書け。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であることを示せ。

(4) 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がそれぞれ実数 a, b に収束するとき、$\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $a+b$ に収束することを示せ。

3. 次の各場合に $(\forall a \in \mathbb{R})\ \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ であることを、極限の定義に従って示せ。

(1) p, q を実数とするとき、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = px + q$ $(x \in \mathbb{R})$

(2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$

4. 次の極限を調べよ (収束・発散のいずれかを証明し、収束する場合は極限を求める)。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{x^2-y^2}$

5. 講義で学んだ定理のうち、極限に関するものを自分で 1 つ選び、その定理を書いた後、証明せよ。その証明の中で別の定理を用いる場合は、その定理を書くこと (その証明はしなくて良い)。

6. (1) $\mathbb{R}^n$ の開集合、$\mathbb{R}^n$ の閉集合の定義を述べよ。

(2) (1) で述べた定義にもとづき、$\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合でもあり、$\mathbb{R}^n$ の閉集合であることを示せ。

(3) 次の各集合が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ。何か定理を用いる場合は、その定理を書くこと。
　(a) $\{(1,2)\}$　(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2 \wedge 3 \le y \le 4\}$

7. (1) $\mathbb{R}^n$ の部分集合が有界であるとはどういうことか、定義を書け。また $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合の例をあげ、それが有界であることを示せ。

(2) 多変数関数に関する Weierstrass の最大値定理を書け。

(3) $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$ (単位円盤から中心を除いた集合), $f\colon K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -\log(x^2+y^2)$ とするとき、f の最大値は存在しない。Weierstrass の最大値定理が適用できないのはなぜか？(定理の仮定のうちどれが成立しないかを記せ。)

解説

最初に、次試験を受ける人向けの注意。

- 用語・記号の定義、定理は覚えること。
  授業で紹介した「数学解析 定義＆定理確認」[1] を活用して下さい。
- 言葉と式に重要さの差はない。「正解」から式だけ拾ってもガラクタである。
- 覚えるために黙読は役に立たない、必ずアウトプットして、お手本と比べる。
- 論理は順序が重要である (一つ間違えたらダメになる場合が多いと覚悟する)。もっとも、命題や条件が論理式で書いてあれば、その順番を守るだけのことである。……　のはずなのだけど順番を守れない人が多い。

それから、覚えるときには、当然のことだけど、正しいものを覚えること。どうも複数の人が間違った資料を見て覚えているのでは？と考えられるふしがあります。正しいことを確認すること。

8 月 3 日 (木曜) 午後、追試験を受ける人対象に質問・相談に応じます。本試験の答案用紙を見て、どのように採点されるか、どういうところを直すべきか知ると役に立つと思います。

1.

(1) $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとは、

$$(\exists U \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad x \le U$$

が成り立つことをいう。

(2) $S \in \mathbb{R}$ が $A \subset \mathbb{R}$ の上限であるとは、次の (i), (ii) が成り立つことをいう。

(i) $(\forall x \in A)\ x \le S.$

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)\ S - \varepsilon < x.$

(3) 「$A \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset$, A は上に有界とするとき、A の上限が存在する。」,「空集合でない、上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合は必ず上限を持つ。」

(4) (i) 任意の $x \in A$ は、$7 \le x < 28$ を満たすので、特に $x \le 28$.

(ii) ε を任意の正の数とする。

- $\varepsilon < 28$ のとき、$x = 28 - \frac{\varepsilon}{2}$ とおくと、$x > 28 - \varepsilon$ かつ $28 > x > 28 - \frac{28}{2} = 14 \ge 7$. ゆえに $28 - \varepsilon < x$ かつ $x \in A$.
- $\varepsilon \ge 28$ のとき、$x = 7$ とおくと、$x \in A$. また $28 - \varepsilon \le 0 < 7 = x$.

ゆえに $(\exists x \in A)\ 28 - \varepsilon < x$ が成り立つ。

(i), (ii) から、28 は A の上限である。 ■

答案を見ると

- (1) で「A が上に有界であるとは」, (2) で「S が A の上限であるとは」を書かないのはまずい。主語を書きましょう。
- $A \in \mathbb{R}$ と書く人がいたりする。

[1] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/kaiseki-junbi.pdf

2.

(1) $\{a_n\}$ が実数列、$a \in \mathbb{R}$ とするとき、$\{a_n\}$ が a に収束するとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

(別解) $\{a_n\}$ が実数列、$a \in \mathbb{R}$ とするとき、$\{a_n\}$ が a に収束するとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

が成り立つことをいう。

(2) 「$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$」という命題をアルキメデスの公理という。

(3) ε を任意の正の数とする。アルキメデスの公理より、ある自然数 N が存在して、$N\varepsilon > 1$ が成り立つ[2]。このとき、$n \geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して、

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

(4) ε を任意の正の数とする。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるから、ある自然数 N_1 が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1) \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b$ であるから、ある自然数 N_2 が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2) \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$N \in \mathbb{N}$ であり、$n \geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して ($n \geq N_1$, $n \geq N_2$ であるから)

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

すなわち

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon.$$

ゆえに $\{a_n + b_n\}$ は $a + b$ に収束する。

答案を見ると

- 収束値という見たことのない言葉を使った人が複数いたのだけれど、一体どういうことなのか？何か変な資料が出回っているのだろうか？
- アルキメデスの公理を間違えた人が例年より少なかったのは良いのだけれど、(3) の証明が出来ない人が多かったのは残念だった。

[2] $a = \varepsilon$, $b = 1$ として適用すると、$na > b$ を満たす自然数 n が存在することが導かれるが、後の都合上、n のことを N と書くことにする。

- (4) の証明中に、$(\forall\varepsilon>0)$ を何度も書いた人が多かったが、それはおかしい。そもそも証明中では「ε を任意の正の数とすると」とか、「$\varepsilon>0$ とする」のような書き出しが普通のはずである。(そう書きなさいと言ってあるのだけど、そうしない人が多い。頑固な人が多いなあ…自分なりの明確な理由があるならともかく、そうでなければ素直にいう通りにしてみようよ。)

  「ここで任意の正の数を考える。それに ε という名前をつけて以下の議論を行う。」という意味であり、一度そうしたからには、もう ε は任意の正の数ではありません。もう名前がつけられた (紹介済みの)「ある正の数」になるはずです。その後に、

  $(\star)$ 「ここで任意の正の数を考える、それに ε という名前をつけて議論する。」

  と言ったら、

  「もうその名前は他の数に使っているからダメです。別の名前をつけるべきです。」

  となるはずである。もしも前の ε と同じものなら、$(\star)$ は書かなければ良い。

  具体的には、次のような答案が多かった。厳密にいうと (筋が通らないので)0 点であるが、減点くらいで勘弁しておいた。

  まずい答案例

  $\{a_n\}$ は a に収束するので

  $$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_1\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}:n\ge N_1)\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

  $\{b_n\}$ は a に収束するので

  $$(\forall\varepsilon>0)(\exists N_2\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}:n\ge N_2)\quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

  $N:=\{N_1,N_2\}$ とおくと、

  $$(\forall n\in\mathbb{N}:n\ge N)\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{かつ}\quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

  $(\forall n\in\mathbb{N}:n\ge N)$

  $$|(a_n+b_n)-(a+b)|=|(a_n-a)+(b_n-b)|\le|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

  したがって、$\{a_n+b_n\}$ は $a+b$ に収束する。■

  ε はこの証明を通して、同じものを指しているのだろう (一つの目標 ε を定めて、それに対して、N_1 と N_2 と、N が決まるのだから)。そういう場合に $(\forall\varepsilon>0)$ は、最初の 1 回しか書けないはずである。

- 任意の正数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ というのを出してから、$\varepsilon:=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ としている人もいたけれど、それでは ε は「任意の正数」にならない。根本的に誤解している。「任意の正数」というのは自分には決められない、与えられるものである。正という制限はあるが、どういう数であるかは、与えられるまでは分からない。x

3.

(1) a を任意の実数とする。任意の正の数 ε に対して、$\delta := \dfrac{\varepsilon}{|p|+1}$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x-a|<\delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(x)-f(a)| = |(px+q)-(pa+q)| = |p(x-a)| = |p|\,|x-a| < |p|\delta = \frac{|p|\varepsilon}{|p|+1} < \varepsilon.$$

ゆえに $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(2) a を任意の実数とする。任意の正の数 ε に対して、$\delta := \varepsilon$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x-a|<\delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(x)-f(a)| = \big||x|-|a|\big| \le |x-a| < \delta = \varepsilon.$$

(ただし、一般に成り立つ $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$ という不等式を用いた。) ゆえに $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

答案を見ると…

- 「任意の正の数 ε」を書かずに、いきなり「$\delta = \dfrac{\varepsilon}{|p|+1}$ とすると」とか「$\delta = \varepsilon$ とすると」と書くのはマズイ。というのは授業中に何度も言っているはずなのだけど。
- $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|p|}$ とか ($p=0$ のときどうするの?)、$\delta = \dfrac{\varepsilon}{p}$ とか ($p<0$ の時 δ が負になったりするけど?

4.

(1) 任意の実数 k に対して、直線 $y=kx$ に沿った極限を調べる。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(1+k^2\right)}{|x|\left(1+|k|\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\left(1+k^2\right)}{\left(1+|k|\right)} = \frac{|0|\left(1+k^2\right)}{\left(1+|k|\right)} = 0.$$

($x^2 = |x|^2$ であること、それと $x \mapsto \dfrac{|x|(1+k^2)}{1+|k|}$ は連続であることを用いた。)

これから、極限が存在するならば、それは 0 である。0 に収束するかどうかを調べる。

$$\left|\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} - 0\right| = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \le \frac{x^2+2|x||y|+y^2}{|x|+|y|} = \frac{\left(|x|+|y|\right)^2}{|x|+|y|} = |x|+|y|\,.$$

$f(x,y) := x$, $g(x,y) := y$ は多項式関数なので $\mathbb{R}^2$ 上で連続であり、$h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(z) := |z|$ も連続であるから、それらの合成関数である $h\circ f(x,y) = |x|$, $h\circ g(x,y) = |y|$ は $\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに $(x,y)\to(0,0)$ とするとき、

$$\left|\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} - 0\right| \le |x|+|y| \to |0|+|0| = 0.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$.

(2) $\dfrac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{(x+y)(x-y)}$ は $\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\ne 0 \land x-y\ne 0\}$ と定義域とする関数である。

$f\colon \Omega\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = x+y$ で定まる f と、$g\colon \Omega\to\mathbb{R}$, $g(x,y) = x-y$ で定まる g は、ともに $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数 (多項式関数だから) を Ω に制限したものであるから、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0+0 = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0-0 = 0.$$

$h\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $h(z)=\frac{\sin z}{z}$ は

$$\lim_{z\to 0} h(z)=1$$

を満たす。ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)}{x+y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} h\circ f(x,y)=1,\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x-y)}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} h\circ g(x,y)=1.$$

これから、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)}{x+y}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x-y)}{x-y}=1\cdot 1=1.$$

■

答案を見ると…

- $\dfrac{x^2}{|x|}=x$ とする人が大勢いるのだけど、正しくは $\dfrac{x^2}{|x|}=|x|$ である。

5. 割と Bolzano-Weierstrass の定理を選択した人が多いので (決して簡単ではないと思うのだけど…選択ミスとまでは言わないけど)、その場合の注意を。

- 定理の方は多次元版にしたのに、証明が 1 次元版という人がすごく多い。おかしい。
- 減少する区間 $[a_n,b_n]$ をどう決めるか、ちゃんと書けない人が多い。

  $x_k\in[a_n,c_n]$ となる k が無限個存在するならば、$a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=c_n$ とし、そうでなければ ($x_k\in[c_n,b_n]$ となる k が無限個存在する) $a_{n+1}=c_n$, $b_{n+1}=b_n$ とする。

  のようになるのだと思うが、$x_k=[a_n,c_n]$ とか、ありえない式 (実数と区間が等しくなるはずはない) を書く人が続出していた。

- $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が定まったとして、部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ をどう定めるかも書けた人は少ない。

6. (1) $A\subset\mathbb{R}^n$ とする。

- A が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、$(\forall a\in A)(\exists\varepsilon>0)\ B(a;\varepsilon)\subset A$ が成り立つことをいう。
- A が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるとは、A の補集合 A^c が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることをいう。

(2) $A=\emptyset$ とする。

- $a\in A$ を満たす a は存在しないので、$(\forall a\in A)$ $(\exists\varepsilon>0)$ $B(a;\varepsilon)\subset A$ は成り立つ[3]。ゆえに A は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。
- $A^c=\mathbb{R}^n$ である。$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である (任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対して、$\varepsilon:=1$ とおくと、$\varepsilon>0$ であり、$B(x;\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n$ であるから)。ゆえに A は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(3) (略. 後で書きます。宿題 8 やってあれば出来るはずだ。)

[3] これは $\forall a\,[a\in A\Rightarrow((\exists\varepsilon>0)B(a;\varepsilon)\subset A)]$ ということであり、$a\in A$ が偽であるから、真である。

7.

(1) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。A が有界であるとは、

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad |x| \le R$$

が成り立つことをいう。

$\mathbb{R}^2$ の開集合の例として、$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. 実際、$R = 1$ とおくと、$R \in \mathbb{R}$ であり、任意の $(x,y) \in A$ に対して、

$$|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{1} = 1$$

であるから、

$$|(x,y)| \le R.$$

(2) K が $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合、$f\colon K \to \mathbb{R}$ が連続ならば、f の K における最大値が存在する。すなわち

$$(\exists a \in K)(\forall x \in K) \quad f(a) \ge f(x).$$

(3) K が閉集合ではないから、Weierstrass の最大値定理は適用できない。実際

$$K^c = \{(0,0)\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 > 1\right\}$$

であり、$a = (0,0)$ とすると、$a \in K^c$ かつ

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad B(a;\varepsilon) \not\subset K^c.$$

ゆえに K^c は開集合ではないので、K は閉集合ではない。 ■

答案を見ると…

- (1) の条件を
$$(\exists R \in \mathbb{R}^n)(\forall x \in A) \quad |x| \le R \quad (\text{これは間違い})$$
とした人が多かった。$x \in \mathbb{R}^n$, つまり x は n 次元ベクトルであるけれど、$|x|$ は実数で、それと比較対象になる R がベクトルということはありえない。$R \in \mathbb{R}$ でないとおかしい。

- (2) Weierstrass の最大値定理がこの講義で一番重要な定理であると言ってある。たとえ言わなくても、そう受け取れるようでないと、授業をちゃんと聴いてないのだ、と思う。一番大事な定理を書けなくてどうする。

- 閉集合とすべきところ、閉区間としたり (1 次元と混同している？)、閉空間としたり (何だろう)。色々な答案が出てきますね。

- (3) f は連続でないと書いた人がいるけれど、f は連続です (原点 $(0,0)$ は K に属さないことに注意)。

- 最大値を持たないことの証明は要求していないけれど、簡単なのは
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \infty$$
を示すことでしょうか。