複合機スキャン用紙

宿題 8 (2017/7/10)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	

Department 所属	Faculty 学部 Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年 Class 組 Number 番	Date 日付	Year 年 Month 月 Day 日

(1) 次にあげる $\mathbb{R}^2$ の部分集合について、図示できる場合は図示し、開集合であればそのことを証明し、閉集合であればそのことを証明せよ。

(i) $\mathbb{R}^2$　(ii) $V = \{(0,0),(2,1),(1,3)\}$ (3 点からなる集合)

(iii) $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$ を頂点とする三角形の内部 Δ　(「内部」というのは、「縁」である三角形の辺を含まない、という意味です。)　(iv) $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{4} < \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\right\}$

(2) 集合 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x < 4,\ 1 \leq y \leq 3\}$ は開集合でないことを証明せよ。

問 8 解説　「位相の公理」を定理 A、$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}$ などが開集合、という定理を定理 B と呼ぶ。また、それぞれの閉集合バージョンを、定理 C, 定理 D と呼ぶことにする (7/10 の授業での呼称)。

図を描くのはサボらせてもらいます。

(1) (i) $\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり、$\mathbb{R}^2$ の閉集合でもある。それぞれ授業の定理 A(1), 定理 C (1) である。定理 A,B,C,D は使って良いと言ったので、それで十分であるが、書かないと気が済まないという人のために、証明を書いておく。

前者の証明をこの場合に書き直すと、「a を $\mathbb{R}^2$ の任意の要素とする。$\varepsilon := 1$ とおくとき、$\varepsilon > 0$ であり、$B(a;\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$ であるから、$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。」

後者の証明をこの場合に書き直すと、「$(\mathbb{R}^2)^c = \emptyset$ であり、$\emptyset$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である ($\because$ $(\forall a \in \emptyset)$ $(\exists \varepsilon > 0)$ $B(a;\varepsilon) \subset \emptyset$ は真であるから)。ゆえに $\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。」

(ii) $V = \{(0,0), (2,1), (1,3)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であるが、$\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。

まず、授業でも例で証明したように「c を $\mathbb{R}^n$ の任意の要素とするとき、$\{c\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。」($\because$ $f(x) := |x - c|^2$ とおくと、$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は多項式関数であるから連続であり、$\{c\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ あるいは $\{c\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ge 0\}$ であるから、定理 D によって、$\{c\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。)

ゆえに $F_1 := \{(0,0)\}$, $F_2 := \{(2,1)\}$, $F_3 := \{(1,3)\}$ はいずれも $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。ゆえに $V = F_1 \cap F_2 \cap F_3$ は (定理 C(2) によって)、$\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(iii) Δ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であるが、$\mathbb{R}^2$ の閉集合ではない。

$(0,0)$ と $(2,1)$, $(0,0)$ と $(1,3)$, $(2,1)$ と $(1,3)$ を通る直線の方程式はそれぞれ $y = \frac{x}{2}$, $y = 3x$, $y = -2x + 5$ であるから

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > \frac{x}{2} \wedge y < 3x \wedge y < -2x + 5\right\} = (U_1 \cap U_2) \cap U_3,$$
$$U_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y - \frac{x}{2} > 0\right\}, \quad U_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y - 3x < 0\right\},$$
$$U_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x + y < 5\right\}.$$

定理 B によって、U_1, U_2, U_3 は $\mathbb{R}^2$ の開集合である ($\because$ $f_1(x,y) = y - x/2$, $f_2(x,y) = y - 3x$, $f_3(x,y) = 2x + y$ はいずれも多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ 上連続である)。定理 A(3) を 2 回使うことによって、Δ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることが導かれる。

(iv) Ω は $\mathbb{R}^2$ の開集合であるが、$\mathbb{R}^2$ の閉集合ではない。Ω が $\mathbb{R}^2$ の開集合であることは、定理 B により分かる ($f(x,y) = x^2/4 + y^2/9$ は多項式であり、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続)。

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合でないことを示すには、

$$(\exists \boldsymbol{a} \in \Omega)(\forall \varepsilon > 0)\ B(\boldsymbol{a};\varepsilon) \not\subset \Omega$$

が成り立つことを確かめれば良い。

($\boldsymbol{a}$ は Ω の縁から選べば良い、と教えてある。図を書くと、どこが縁かは簡単に分かる。Ω は正方形で、左右の辺 (頂点含む) は Ω に含まれず、上下の辺 (頂点含まず) は Ω に含まれるので、例えば上の辺の中点である $\boldsymbol{a} = (3,3)$ は Ω の縁の上にある。)

$\boldsymbol{a} := (3,3)$ とおくと、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$B(\boldsymbol{a};\varepsilon) \not\subset \Omega$ である。実際、$\boldsymbol{x} := \boldsymbol{a} + \frac{\varepsilon}{2}(0,1) = (3, 3 + \varepsilon/2)$ とおくと、$\boldsymbol{x}$ の第 2 成分 $3 + \varepsilon/2 > 3$ であるから、$\boldsymbol{x} \notin \Omega$. 一方、

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = \left|\frac{\varepsilon}{2}(0,1)\right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

であるから $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a};\varepsilon)$. ゆえに $B(\boldsymbol{a};\varepsilon) \not\subset \Omega$. ■

次のページに続く。

- (とても重要) 開集合でないことを証明して、「だから閉集合である」としている人が結構いたけれど、「開集合でなければ閉集合である」は偽です。これは良くある勘違い。
  開集合系の公理でやったように、$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合でもあり、閉集合でもある。また半開区間 $(1,2]$ は開集合でもないし、閉集合でもない。

- (1) (iii) で「内部」は、「縁」である三角形の辺は含まない、という意味だったのですが、あいまいで分かりにくかったですね。ごめんなさい。

- (2) 「開集合と閉集合の共通部分になっているので開集合でない」という解答がたくさんあった。それはデタラメです。