複合機スキャン用紙

宿題 7 (2017/6/19)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科						Subject/Teacher 科目/教員名	/			
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番					Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日	

問 7　$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続かつ狭義単調増加[1]とする。$A := f(a)$, $B := f(b)$ とおくと、任意の $x \in [a,b]$ に対して $A \le f(x) \le B$ が成り立つので、$\widetilde{f}\colon [a,b] \to [A,B]$ を $\widetilde{f}(x) := f(x)$ $(x \in [a,b])$ で定めることが出来る。この $\widetilde{f}$ が、以下の (1), (2), (3) を満たすことを示せ。

(1) $\widetilde{f}$ は単射である。　(2) $\widetilde{f}$ は全射である。　(3) 逆関数 $\widetilde{f}^{-1}$ は連続である。

[1]すなわち、$(\forall x \in [a,b])\ (\forall x' \in [a,b])\ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ が成り立つ。

問 7 解説

(1) $\widetilde{f}\colon [a,b] \to [A,B]$ は狭義単調増加であるから、単射である。

(証明) $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 \neq x_2$ とするとき、(i) $x_1 < x_2$ (ii) $x_1 > x_2$ のいずれか一方が成り立ち、$\widetilde{f}$ は狭義単調増加であるから、(i) のとき $\widetilde{f}(x_1) < \widetilde{f}(x_2)$, (ii) のとき $\widetilde{f}(x_1) > \widetilde{f}(x_2)$ が成り立つ。いずれの場合も $\widetilde{f}(x_1) \neq \widetilde{f}(x_2)$ である。ゆえに $\widetilde{f}$ は単射である。

(2) $y \in [A,B]$ とする。

(i) $y = A$ のとき、$x = a$ とおくと $\widetilde{f}(x) = f(a) = A = y$.

(ii) $y = B$ のとき、$x = b$ とおくと $\widetilde{f}(x) = f(b) = B = y$.

(iii) $A < y < B$ のとき、$F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を $F(x) := \widetilde{f}(x) - y$ で定めると、F は連続であり、

$$F(a) = \widetilde{f}(a) - y = A - y < 0, \quad F(b) = \widetilde{f}(b) - y = B - y > 0.$$

中間値の定理から、ある $c \in (a,b)$ が存在して、$F(c) = 0$. このとき $\widetilde{f}(c) - y = 0$. すなわち $\widetilde{f}(c) = y$.

以上より、いずれの場合も、$(\exists x \in [a,b])\ \widetilde{f}(x) = y$ が成り立つ。ゆえに $\widetilde{f}$ は全射である。

(3) 任意の $y \in (A,B)$ に対して、$x := \widetilde{f}^{-1}(y)$ とおくと、$a < x < b$ が成り立つ。$0 < \varepsilon < \min\{x-a, b-x\}$ を満たす任意の ε に対して、

$$\delta := \min\left\{\widetilde{f}(x+\varepsilon) - \widetilde{f}(x), \widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x-\varepsilon)\right\}$$

とおくと、$\delta > 0$ であり、$|y - y'| < \delta$ ならば、

$$\left|\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y')\right| < \varepsilon$$

が成り立つ[2]。

$y = A, B$ のときもほぼ同様である。例えば、$y = A$ のときは、$x = a$. $0 < \varepsilon < b - a$ を満たす任意の ε に対して、$\delta := \widetilde{f}(a+\varepsilon) - \widetilde{f}(a)$ とおけば、$\varepsilon > 0$ であり、$|y - y'| < \delta$ ならば $\left|\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y')\right| < \varepsilon$ が成り立つ。 ■

講評

- (1), (2) は出来るようになってもらいたい。(3) はそれより難しめかもしれないが、グラフを描きながら説明を読むと良い。
- (1) については、数理リテラシーで「狭義単調増加ならば単射」というのを学んだのではないかと思うのだけど、出来た人は少なかった。復習をすれば良いと思う。
- (1) で使うのは、狭義単調増加なことだけど、連続も理由にあげた人がいる。一体どうやって使うのだろう？
- (2) では、$\widetilde{f}\colon [a,b] \to [A,B]$, $\widetilde{f}(a) = A$, $\widetilde{f}(b) = B$ であることを認めれば、後は連続なことを注意して、中間値の定理を使うわけである。
- (3) はちょっと難しいかなあ、、、まあ、1 次元だから、これで済んでいるのだけど。

[2] グラフを描いて考えれば、ほぼ自明であるが、一応書いておくと、$|y' - y| < \delta$ より $y - \delta < y' < y + \delta$. $y = \widetilde{f}(x)$ に注意すると、δ の定義より、$\delta \le \widetilde{f}(x+\varepsilon) - \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x+\varepsilon) - y$, $\delta \le \widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x-\varepsilon) = y - \widetilde{f}(x)$ であるから、$\widetilde{f}(x-\varepsilon) < y - \varepsilon$, $y + \delta \le \widetilde{f}(x+\varepsilon)$. ゆえに $\widetilde{f}(x-\varepsilon) < y' < \widetilde{f}(x+\varepsilon)$. $\widetilde{f}^{-1}$ も狭義単調増加であるから、$x - \varepsilon < \widetilde{f}^{-1}(y') < x + \varepsilon$. $x = \widetilde{f}^{-1}(y)$ に注意すると、$\left|\widetilde{f}^{-1}(y') - \widetilde{f}^{-1}(y)\right| < \varepsilon$.