複合機スキャン用紙

宿題 6 (2017/6/5)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号										Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部			Department 学科			Subject/Teacher 科目/教員名	/			
Class 年・組・番号	Grade 年		Class 組		Number 番		Date 日付	Year 年		Month 月	Day 日

問 6　次の極限が存在するかどうか調べ、存在する場合はそれを求めよ。発散する場合も ∞ または $-\infty$ であるときはそれを指摘せよ。簡単で良いので根拠を書くこと。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+2x+3}{x^2+xy+y^2+1}$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \begin{pmatrix} x^3-2xy^2 \\ 3x^2y-y^3 \end{pmatrix}$　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$　(7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{|x|+|y|}$　(8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$

(9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+2xy+3y^2}$　(10) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}$

(工事中: これから試験監督と会議なので、それが終わってから (9), (10) の答えを書きます。)

(7) が知る人ぞ知る難しい問題で、(8) はその理解を深めてもらうために今回考え出した「新作」です。

関数についての問題は、1 変数関数ならば「(どんな関数か理解するために) まずグラフを描け」と言われそう。2 変数関数は簡単にグラフを描けないが、コンピューターが使えるならば、コンピューターに描かせるのは役に立つかもしれない。

Mathematica で (6), (7) のグラフを描く

```
Plot3D[x y/(x+y),{x,-1,1},{y,-1,1}]

Plot3D[Abs[x y]/(Abs[x]+Abs[y]),{x,-1,1},{y,-1,1}]
```

今、思い出したけれど、6 月 12 日、お客さんが見学に来たこともあって、割と張り切った講義をして、僕としてはうまく行った、と思いました。ノートを取っていれば、ぜひそれも見てもらいたいところです。

(1) 関数は $(0,1)$ で連続なので ($\because$ 分母が $(0,1)$ で 0 にならない有理関数 (念のため復習: 分母と分子が x と y の多項式であるような式が有理式で、それで定められる関数が有理関数))、$(0,1)$ での値に収束する:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+2x+3}{x^2+xy+y^2+1} = \frac{0^2+2\cdot 0+3}{0^2+0\cdot 1+1^2+1} = \frac{2}{3}.$$

(2) 関数は $(2,3)$ で連続なので ($f_1(x,y) := x^3-2xy^2$, $f_2(x,y) := 3x^2y-y^3$ とおくと、$f_1(x,y)$ と $f_2(x,y)$ は x と y の実係数多項式だから、f_1 と f_2 は $\mathbb{R}^2$ 上で連続であり、$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ も $\mathbb{R}^2$ 上で連続)、$(2,3)$ での値に収束する:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \begin{pmatrix} x^3-2xy^2 \\ 3x^2y-y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3-2\cdot 2\cdot 3^2 \\ 3\cdot 2^2\cdot 3-3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(3) k を実数として、直線 $y=kx$ に沿って $(0,0)$ に近づけたときの極限を調べてみると

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

この結果は k に依存するので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しない。

(4) 存在しない ((3) と同様にやって、$\dfrac{1+k}{1-k}$ となるので)。

注意: この問題を極座標変換すると

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y} = \lim_{r\to 0}\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r(\cos\theta-\sin\theta)} = \lim_{r\to 0}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}.$$

これは (やはり) 極限なし ($\because$ $\theta=\theta_0$ として、$r\to 0$ とする極限は $\frac{\cos\theta_0+\sin\theta_0}{\cos\theta_0-\sin\theta_0}$ となり、θ_0 に依存するから)、というのが結論であるが、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y} = \lim_{r\to 0}\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r(\cos\theta-\sin\theta)} = \lim_{r\to 0}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta} = \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta} \quad \text{(最後の $=$ は間違い)}$$

と計算して、これが θ に依存するから極限は存在しない、と書いた人がいた。これは厳密には間違いである。

「任意の $\theta \in [0, 2\pi)$ に対して、

$$\lim_{r\to 0}\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r(\cos\theta-\sin\theta)}=\lim_{r\to 0}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

であり、これが θ に依存するので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$ は存在しない」というのは ($y = kx$ 作戦とほぼ同じことで) 正しい議論である。

違いが良く分からない人は、極座標変換を気軽に使わないことを勧めます。

(5) k を実数として、直線 $y = kx$ に沿って $(0, 0)$ に近づけたときの極限を調べてみると

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{\sqrt{x^2(1+k^2)}}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{|x|\sqrt{1+k^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{k|x|}{\sqrt{1+k^2}}=0.$$

ゆえに、もし極限が存在するのならば、0 である。

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\frac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2}|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=|y|.$$

$(x, y) \to (0, 0)$ のとき $|y| \le 0$ であるから、はさみ打ちの原理によって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

(別解) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ($r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$) と変数変換すると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{r^2}}=\lim_{r\to 0}r\cos\theta\sin\theta=0.$$

(最後の $=$ は、やはりはさみ打ちの原理による。)

(6) k を実数の定数として、$y = kx$ に沿った極限を調べる。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x+kx}=\lim_{x\to 0}x\frac{k}{1+k}=0\cdot\frac{k}{1+k}=0.$$

これから、もしも極限が存在するならば、それは 0 である。$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ($r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$) とおくと、

$$xy=r\cos\theta\cdot r\sin\theta=\frac{r^2\sin 2\theta}{2},\quad x+y=r\cos\theta+r\sin\theta=\sqrt{2}r\sin(\theta+\pi/4)$$

であるから、$\theta \ne 3\pi/4, 7\pi/4$ であるとき、

$$\left|\frac{xy}{x+y}-0\right|=\left|\frac{r^2\sin 2\theta}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}r\sin(\theta+\pi/4)}\right|=\frac{r}{2\sqrt{2}}\left|\frac{\sin 2\theta}{\sin(\theta+\pi/4)}\right|.$$

$r > 0$ がどんなに小さくても、θ を十分 $3\pi/4$ に近く取れば、$\left|\dfrac{\sin(\theta+\pi/4)}{\sin 2\theta}\right| < \dfrac{r}{2\sqrt{2}}$ と出来て、$\dfrac{r}{2\sqrt{2}}\left|\dfrac{\sin 2\theta}{\sin(\theta+\pi/4)}\right| > 1$. ゆえに $\dfrac{xy}{x+y}$ は 0 には収束しない。従って、極限は存在しない。

(注) この問題は多くの人が間違えた。確かに難しい問題ではある。昔、この問題を例題に取り上げて、答えは 0 と間違えた本があったけれど、版を改めて修正された、ということがありました。

(7) 前問と同様に扱う。対称性から $x \geq 0, y \geq 0$ の場合に考えれば良い。すると

$$\left|\frac{|xy|}{|x+y|} - 0\right| = \left|\frac{xy}{x+y}\right| = \frac{r}{2\sqrt{2}}\left|\frac{\sin 2\theta}{\sin(\theta + \pi/4)}\right|.$$

ここで θ の範囲は $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ であるから、$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$ であるから、$\sin(\theta + \pi/4) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $|\sin 2\theta| \leq 1$ も成り立つので、

$$\left|\frac{|xy|}{|x+y|} - 0\right| \leq \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \frac{r}{2} \to 0 \quad ((x,y) \to (0,0)).$$

ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{|x|+|y|} = 0.$$

(8) これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。
$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$, $B := \{z \in \mathbb{R} \mid z \neq 0\}$ とおいて、$f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) := xy$, $g(z) := \dfrac{\sin z}{z}$ で定義する (f の定義域を $\mathbb{R}^2$ でなく、A にするのは、f と g を合成出来るようにするための工夫である)。$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0 \cdot 0 = 0$ (多項式関数は連続だから $(x,y) = (0,0)$ での値に収束) より、多項式関数 xy の A への制限である f についても、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ が成り立つ。$\displaystyle\lim_{z\to 0} g(z) = 1$ は高校で学んだ。$f(A) \subset B$ であるから、g と f は合成できて、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y)) = \lim_{z\to 0} g(z) = 1. \blacksquare$$

(9) 今日の授業で証明するけれど、、、、

(10) 今日の授業で証明するけれど、、、、