複合機スキャン用紙

宿題 5 (2017/5/29)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部			Department 学科				Subject/Teacher 科目/教員名	/			
Class 年・組・番号	Grade 年		Class 組		Number 番			Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日	

問 5　次の各関数が $\mathbb{R}^2$ で連続であることを示せ (理由を述べよ)。

(1) $f(x,y) = 1 - 2x + \sqrt{3}y + e^{-4}x^2 + xy\sin\frac{\pi}{5} + y^2\log 6$　(2) $g(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix}$

(3) $h(x,y) = e^{x^2+2xy+y^2}$　(4) $\varphi(x,y) = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+xy+y^2+1}$　(5) $\psi(x,y) = \log\left[2 + \sin(4x+6y+8)\right]$

問 5 解答

(1) $1, -2, \sqrt{3}, e^{-4}, \sin\frac{\pi}{5}, \log 6$ は全て実数であるから、$f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ ($f(x,y)$ は x, y の実係数多項式である). ゆえに $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と考えるとき、f は連続である。

(2) $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ とおくとき、$g_1(x,y)$ と $g_2(x,y)$ は x, y の実係数多項式であるから、$g_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。ゆえに $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。

(3) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) := x^2 + 2xy + y^2$ は多項式関数であるから連続である。一方 $G\colon \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{R}$ も連続である。h は F と G の合成関数である: $h = G \circ F$. ゆえに連続関数の合成関数である h は連続である。

(4) $q(x,y) := x^2 + 2x + 3$ と $p(x,y) := x^2 + xy + y^2 + 1$ はともに x, y の実係数多項式である。ゆえに $\varphi(x,y) = \dfrac{q(x,y)}{p(x,y)}$ は x, y の実係数有理式である。任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、分母 $p(x,y) = (x+y/2)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 \geq 1$ であるから、$p(x,y) \neq 0$. ゆえに φ の定義域は

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; p(x,y) \neq 0\right\} = \mathbb{R}^2.$$

(「有理関数は、$\mathbb{R}^2$ から分母が 0 である点を除いた集合で定義され、そこで連続である。」ことは学んだ。)
ゆえに φ は $\mathbb{R}^2$ で連続である。

(5) $(x,y) \mapsto \sin(4x + 6y + 8)$ は $\mathbb{R}^2$ の多項式関数と、$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の合成関数であるから、$\mathbb{R}^2$ で連続であり、値域は $[-1,1]$ である。$\xi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\xi(x,y) := \sin(4x + 6y + 8) + 2$ は連続であり、値域は $[1,3]$ であり、$[1,3] \subset (0,\infty)$ であるから、ξ と $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は合成可能である。$\log$ は連続関数であるから、$\psi = \log \circ \xi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。■