複合機スキャン用紙

宿題 4 (2017/5/15)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	

Department 所属	Faculty 学部	Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組 / Number 番	Date 日付	Year 年 Month 月 Day 日

問 4 (1) I は $\mathbb{R}$ の区間、$a \in \overline{I}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ とするとき、$\lim_{x\to a} f(x) = A$ が成り立つための条件を (論理式と日本語の両方で) 書け。

(2) 次の各場合に $(\forall a \in \mathbb{R})\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ であることを、極限の定義に従って示せ。

(a) $f(x) = -2x + 3\ (x \in \mathbb{R})$ (b) $f(x) = x^2$

問 4 解説

(1) 任意の正の数 ε に対して、ある正の数 δ が存在して、$|x-a|<\delta$ を満たす任意の $x\in I$ に対して、$|f(x)-A|<\varepsilon$ が成り立つ。

$(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)$ $(\forall x\in I\colon\ |x-a|<\delta)$ $|f(x)-A|<\varepsilon$. あるいは $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)$ $(\forall x\in I)$ $(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon)$.

(2) (a) a を任意の実数、ε を任意の正の数とする。$\delta:=\varepsilon/2$ とおくと、$\delta>0$ であり、$|x-a|<\delta$ を満たす任意の実数 x に対して

$$|f(x)-f(a)|=|(-2x+3)-(-2a+3)|=|-2(x-a)|=2\,|x-a|<2\delta=\varepsilon.$$

ゆえに $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. これは $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ を示している。

(b) a を任意の実数、ε を任意の正の数とする。$\delta:=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2|a|+1},1\right\}$ とおくと、$\delta>0$ であり、$|x-a|<\delta$ を満たす任意の実数 x に対して

$$\begin{aligned}&|x+a|=|x-a+2a|\le|x-a|+|2a|<\delta+2|a|\le 1+2\,|a|\,,\\&|f(x)-f(a)|=\left|x^2-a^2\right|=|x-a|\,|x+a|<\delta\,(1+2\,|a|)\le\frac{\varepsilon}{2\,|a|+1}\,(1+2\,|a|)=\varepsilon.\end{aligned}$$

ゆえに $|f(x)-f(a)|\le\varepsilon$. これは $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ を示している。 ■

- 過去の経験によると、(2)(a) で $\delta=\dfrac{\varepsilon}{-2}$ とする人が結構いる。それだと $\delta>0$ とならない。また $|-2(x-a)|=2\,|x-a|$ であって、$|-2(x-a)|=-2\,|x-a|$ ではない。
- (2)(b) は分かりにくかもしれない。どうやって δ を発見したか説明してみる。$f'(a)=2a$ であるから、(2)(a) を解答済みであれば、最初に $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2|a|+1}$ 浮かびそうである。そうすると

$$|x-a|<\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x)-f(a)|=|x-a|\,|x+a|<\frac{\varepsilon}{2\,|a|+1}\cdot|x+a|$$

としてみると、

$$\frac{|x+a|}{2\,|a|+1}$$

を上から抑える必要が見えて来る。

$$|x+a|=|(x-a)+2a|\le|x-a|+2\,|a|$$

と評価すると

$$\frac{2\,|a|+|x-a|}{2\,|a|+1}$$

を上から抑えたくなり、$|x-a|\le 1$ とすることが浮かんで来る。 ■