複合機スキャン用紙

宿題 3

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科						Subject/Teacher 科目/教員名	/			
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番					Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日	

問 3　(2017 年 4 月 24 日出題, 5 月 8 日授業開始時提出 (忘れないように), 裏面利用可能)
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とするとき、次の (1), (2) に答えよ。

(1) $a \in \mathbb{R}$ とする。

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が a に収束するという条件を論理式で表わせ。

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が a に収束しないという条件を論理式で表わせ。

(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束列でないという条件を論理式で表わせ。

(いずれも否定の記号 $\neg$ を用いずに書くこと。)

問 3 の解説　「○○は□□に収束する」、「○○は収束列である」などの定義を覚えておけば、後は論理のルールを適用するだけ。

- 数列が実数に収束することの定義 ((1)(a) で尋ねられていること) と、数列が収束であることの定義 ((2) を解くのに必要なこと) は覚えておくこと。$n \geq N \Rightarrow$ を使うか、$n \geq N$ を前提条件にするか、2 つの書き方があるが、両方とも出来た方が良い。後者の方が否定を作るときに機械的に出来るという利点がある。
- 量称記号を含む論理式の否定の作り方はマスターすること (覚えるのと、なぜそうなるか理解する)。

要点確認

- (「ならば」 $\Rightarrow$ の復習) $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$. これから $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q)$.
- 量称と否定について
$$\neg\left((\forall x)P(x)\right) \equiv (\exists x)\neg P(x)$$
と
$$\neg\left((\exists x)P(x)\right) \equiv (\forall x)\neg P(x)$$
が基本である。
- $(\forall x : P_1(x))P_2(x)$ は $(\forall x)\ P_1(x) \Rightarrow P_2(x)$ を書き換えたものである。
$(\exists x : P_1(x))P_2(x)$ は $(\exists x)\ P_1(x) \wedge P_2(x)$ を書き換えたものである。
- 以上から
$$\neg\left((\forall x : P_1(x))P_2(x)\right) \equiv (\exists x : P_1(x))\neg P_2(x)$$
と
$$\neg\left((\exists x : P_1(x))P_2(x)\right) \equiv (\forall x : P_1(x))\neg P_2(x)$$
が導かれる。

解答

(1) (a) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ |a_n - a| < \varepsilon.$
(別解) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$
(b) $(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ |a_n - a| \geq \varepsilon.$
(別解) $(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ n \geq N \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon.$

(2) $\{a_n\}$ が収束列であるとは、
$$(\exists a \in \mathbb{R}) \quad \{a_n\} \text{ は } a \text{ に収束する}$$
ということであるから、この否定は
$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \underline{\{a_n\} \text{ は } a \text{ に収束しない}}$$
である。下線部に (1)(b) の答を代入すれば良い。

- $(\forall a \in \mathbb{R})\ (\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ |a_n - a| \geq \varepsilon.$
- (別解) $(\forall a \in \mathbb{R})\ (\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ n \geq N \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon.$ ■