数学解析 問 **No. 2**　(2017 年 4 月 17 日出題, 4 月 24 日提出)

__年__ 組____番　氏名______________

(2017 年 4 月 17 日出題, 4 月 24 日授業開始時提出, 裏面利用可能)

$A = (2, 3]$ とするとき、以下の問に答えよ。(1) A の上限を求めよ。上限である根拠も書くこと。

(2) A の下限を求めよ。下限である根拠も書くこと。

問 2 の解答　($A=(2,3]$ であるから、$x \in A \Leftrightarrow 2 < x \leq 3$ である。)

(1) 3 は A の最大値である (これくらいは明らかでも構わないが、一応根拠を書いておくと、(a) A の任意の要素 x に対して、$x \leq 3$ が成り立つ　(b) $3 \in A$)。

「最大値が存在するならば、それは上限である」という定理によって、3 は A の上限である。

(別解) (i) A の任意の要素 x に対して $x \leq 3$ が成り立つ。(ii)「$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)\ 3-\varepsilon < x$」が成り立つ。なぜならば、$\varepsilon$ を任意の正の数とするとき、$x=3$ とおくと、$x \in A$ かつ $3-\varepsilon < x$.　(i), (ii) より 3 は A の上限である。

(2) A の下限は 2 である。実際、

(i) A の任意の要素 x に対して、$2 < x \leq 3$ が成り立つ。ゆえに $2 \leq x$.

(ii) ε を任意の正数とするとき、ある $x \in A$ が存在して、$x < 2+\varepsilon$ を満たす。実際、

- $\varepsilon \leq 2$ ならば、$x = 2+\frac{\varepsilon}{2}$ とおくと、$2 < x \leq 2 + \frac{2}{2} = 3$ であるから $x \in A$ であり、$x = 2 + \frac{\varepsilon}{2} < 2+\varepsilon$.
- $\varepsilon > 2$ ならば、$x=3$ とおくと、$2 < x \leq 3$ であるから $x \in A$ であり、$x = 3 < 2+2 < 2+\varepsilon$.

(i), (ii) より 2 は A の下限である。 ■

((2)(ii) は、場合分けせずに $x := \min\{2+\varepsilon/2, 3\}$ とおいても良い。こうすると、$2 < x \leq 3$ であるから $x \in A$, また $x < 2+\varepsilon$. …… 本質的には同じことであるが。)

(補足) $\varepsilon \leq 2$ と $\varepsilon > 2$ で場合分けしたが、$2+\varepsilon$ より小さい x として、$x + \dfrac{\varepsilon}{2}$ を使おうとして、$x \in A$ (つまり $2 < x \leq 3$) が成り立つようにするために、$\varepsilon \leq 2$ という条件をつけたせいであり、あまり本質的ではない。$\varepsilon \leq 3$ と $\varepsilon > 3$ のように 3 で分けても、$\varepsilon \leq 1$ と $\varepsilon > 1$ のように 1 で分けても証明が出来る (もちろん x の取り方が変わってくる)。区間 A の幅で分けるのが簡単かもしれない。こういうのは図を描いて考えるのが良いと思うが、図を描いた答案はほとんどなかった。

(補足) (2) で「A の下界全体が $(-\infty, 2]$ であるから、その最大値 2 が A の下限である」という答案があった。なるほど、講義で、状況を説明するとき、そういうことを話した。しかし「A の下界全体が $(-\infty, 2]$ である」の証明をサボってもらって困る。