

数学解析 問 No. 1 (2017年4月10日出題, 4月17日提出)

__年__組__番 氏名_____

(1) $A \subset \mathbb{R}$ とする。次の論理式を日本語で (\forall, \exists という記号は使わずに) 表わせ。

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

(不等式は無理に日本語にしなくても良い¹。)

(2) 次の日本語の文で表された各命題を (a) 論理式で書き直し、(b) 証明せよ。

(i) 任意の実数 x に対して、 x^2 より大きい実数 y が存在する。

(ii) ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $y^2 > x$ が成り立つ。

¹ \forall と \exists が読めることを確認する問題なので。

「否定命題を書け。」を加えておけば良かった。

問 1 解説

- (1) 任意の正の数 a, b に対して、ある正の自然数 n が存在して、 $na > b$ が成り立つ。
- (2) (i) (a) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) y > x^2$. (b) x を任意の実数とする。 $y = x^2 + 1$ とおくと、 y は実数であり、かつ $y > x$.
- (ii) (a) $(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) y^2 > x$. (b) $x = -1$ とおくと、 x は実数であり、任意の実数 y に対して、 $y^2 \geq 0 > -1 = x$. ゆえに $y^2 > x$.