数学解析 練習 **No. 4**　(2017 年 7 月 17 日, 提出の必要はない、答えが裏にあるし)

__年__ 組____番　氏名_____________

問 4

(1) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ が C^1 級とするとき、ある実数 M が存在して、任意の $x, x+h \in [0,1]$ に対して $|f(x+h) - f(x)| \le M\,|h|$ が成り立つことを示せ。

(この結果を $f(x+h) - f(x) = O(h)$ $(h \to 0)$ と書くことがある。$O(\cdot)$ は Landau の記号というもの。)

(2) 次の命題は偽である。反例を示せ。「I を $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$ は連続、任意の $x \in I$ に対して $f(x) > 0$ が成り立つとする。このとき、$f(x) \ge \delta$ $(x \in I)$ を満たすような正の数 δ が存在する。」

(ヒント: I が $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$ である、という条件を加えると真になるので、そうでない場合を考える。)

答

(1) f が C^1 級であるから、導関数 f' が存在し、$f'\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ は連続である。$g\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ は連続関数であるので、f' と g の合成関数である、$|f'|: [0,1] \to \mathbb{R}$ は連続である。ゆえに Weierstrass の定理によって

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)|$$

が存在する。これを M とおく。中間値の定理により、任意の $x \in [0,1]$ と、$x+h \in [0,1]$, $h \neq 0$ を満たす h に対して、ある $\theta \in (0,1)$ が存在して、

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h.$$

これから

$$|f(x+h) - f(x)| = |f'(x+\theta h)|\,|h| \le M|h|.$$

$h = 0$ の場合もこの不等式は成り立つ (両辺ともに 0 であるから)。

(2) $I = (0,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ とすると、I は $\mathbb{R}$ の区間で、$f\colon I \to \mathbb{R}$ は連続である (実際 f は分母が 0 にならない有理関数の I への制限であるから連続である)。また $x \in I$ であるから、$x > 0$. ゆえに $f(x) = \dfrac{1}{x} > 0$. ところが、

$$f(x) \ge \delta \quad (x \in I)$$

を満たす正の数 δ は存在しない (実際、任意の正の数 δ に対して、$x := \dfrac{2}{\delta}$ とおくと、$x \in I$ であり、$f(x) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{\delta}{2} < \delta$. すなわち、$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ $f(x) < \delta$ という否定命題が証明出来たことになる。)。■