2016 年度 数学解析 期末試験問題

2016 年 7 月 29 日 (金曜) 9:00〜10:00 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1, **2** は必ず解答せよ。**3**〜**7** のうちから 3 題選択して解答せよ。(合計 5 問解答することになる。)

1.　(1) $\mathbb{R}$ の部分集合の上限の定義を書け。　(2) Weierstrass の上限公理を書け。　(3) アルキメデスの公理 (原理) を書け。　(4) 次の (a),(b) いずれかを証明せよ。(a) (Weierstrass の上限公理を使って) アルキメデスの公理　(b) (アルキメデスの公理を使って) 集合 $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ の上限は 1 である。

2.　$f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z,w) = x^2y^2z^2w^2$ で定め、$S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2+z^2+w^2 = 1\}$ とおくとき、Weierstrass の最大値定理を用いて、f の S における最大値が存在することを示せ (省略せず、ていねいに答えること)。

3.　(1) 実数列が実数に収束するとはどういうことか、定義を述べよ。
(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が、

$$\text{(i) } (\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \le b_n \le c_n \quad \text{(ii) } (\exists A \in \mathbb{R})\ \lim_{n\to\infty} a_n = A \wedge \lim_{n\to\infty} c_n = A$$

を満たすならば、$\lim_{n\to\infty} b_n = A$ が成り立つことを示せ。(ヒント: $|b_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$)

4.　次の各場合に $(\forall a \in I)\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ であることを、極限の定義に従って示せ。

(1)　$p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$, $f \colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = px + q\ (x \in I)$

(2)　$I = (0,\infty)$, $f \colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\ (x \in I)$

5.　次の極限を調べよ (収束・発散のいずれかを証明し、収束する場合は極限を求める)。
(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x^2+y^3+y^2}{x^2+y^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

6.　次の (1)〜(5) のいずれか 1 つを選び証明せよ。ただし (1), (3), (5) については、定理の内容も説明すること。
(1) Bolzano-Weierstrass の定理 (1 次元版) (2) $\mathbb{R}^n$ の閉集合 K 内の点列が収束するならば、その極限は K に属する。(3) Bolzano-Weierstrass の定理 (多次元版) (4) $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 K 内の任意の点列に対して、収束部分列が存在し、その極限は K に属する。(5) Weierstrass の最大値定理
((3)〜(5) の証明には、それ以前に書かれている定理を用いても良い。)

7.　(1) $\mathbb{R}^n$ の開集合の定義を述べよ。(2) $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ はともに $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ。(3) $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ 以外の $\mathbb{R}^n$ の開集合の例をあげよ (証明もすること)。

1.

(1) $A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ とする。S が A の上限であるとは、次の (i) と (ii) を満たすことをいう。

(i) $(\forall x \in A)\ x \le S$.

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ S - \varepsilon < x$.

(2) $A \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset$, A は上に有界とするとき、A の上限 S が存在する。

(3) $(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$.

(4) (a) 背理法を用いる。アルキメデスの公理が成り立たなければ、$(\exists a > 0)(\exists b > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ na \le b$. そのような a, b と取り、$A := \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおくと、$A \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset$ ($\because a = 1 \cdot a \in A$), さらに A は (b を上界に持つので) 上に有界である (実際、任意の $x \in A$ に対して、ある n が存在して、$x = na$ であるが、背理法の仮定から $na \le b$ であるから、$x \le b$)。ゆえに Weierstrass の上限公理から、A の上限 S が存在する。$\varepsilon = a/2$ として、上限の条件 (ii) から $\exists x \in A$ s.t. $S - a/2 < x$. $x = na$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在するので、$S - a/2 < na$. ゆえに $S < (n + 1/2)a < (n+1)a$. $(n+1)a \in A$ であるから、これは S が A の上限であることに矛盾する (条件 (i) に反する)。ゆえにアルキメデスの公理が成り立つ。

(b) $S = 1$ とおくと、上限の条件 (i), (ii) が成り立つことを確かめる。

(i) 任意の $x \in A$ に対して、ある自然数 n が存在して、 $x = 1 - \dfrac{1}{n}$. $n > 0$ であるから、$\frac{1}{n} > 0$. ゆえに $x < 1$. 特に $x \le S$.

(ii) 任意の正の数 ε に対して、アルキメデスの公理から、ある自然数 n が存在して、$n\varepsilon > 1$. これから $\frac{1}{n} < \varepsilon$. ゆえに $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon = S - \varepsilon$. これは $S - \varepsilon < x$ を満たす $x \in A$ が存在することを示している。

(i), (ii) から S は A の上限である。

講評　この問題で点を稼いでいる人が多かった。(3) で、$(\forall a \in \mathbb{R})\ (\forall b \in \mathbb{R})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$ としたり、$(\forall a > 0)\ (\forall b < 0)\ (\exists n \in \mathbb{R})\ na > b$ とするような間違いがあるのは例年通り。

結構 (4) が解ける人がいて、ちょっとうれしい。■

2.　$g(x,y,z,w) := x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1$ ($(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$) とおくと、$f$ も g も多項式関数であるから、$\mathbb{R}^4$ で連続である。

$S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid g(x,y,z,w) = 1\}$ が成り立ち、g が $\mathbb{R}^4$ で連続であることから、S は $\mathbb{R}^4$ の閉集合である。

$R := 1$ とおくと、$(x,y,z,w) \in S$ とするとき、

$$|(x,y,z,w)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} = 1 = R$$

であるから、$|(x,y,z,w)| \le R$. ゆえに S は有界である。

以上より、S は $\mathbb{R}^4$ の有界閉集合であり、$f\colon S \to \mathbb{R}$ は連続であるから、Weierstrass の最大値定理によって、f の S における最大値が存在する。■

講評　この問題が解けるように、多項式関数は連続とか、連続関数と等式で表される集合は閉集合とか、準備してきたのだけれど、答案の中に、多項式も連続も閉集合もない人が多かった (残念)。$f(x,y,z,w)$ が多項式関数というのは気が付かないのかな…x^2, y^2, z^2, w^2 の積だという人が多かったけれど、それぞれ $\mathbb{R}^4$ で考えるべきなので、ちゃんと書けた人はあまりいなかった。

3. (1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は実数列、$a\in\mathbb{R}$ とする。$\{a_n\}$ が a に収束するとは、

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}:n\geq N)\quad |a_n-a|<\varepsilon$$

が成り立つことをいう。
(2) ε を任意の正の数とする。(ii) より、ある自然数 N_1, N_2 が存在して、

$$(\forall n\in\mathbb{N}:n\geq N_1)\,|a_n-A|<\varepsilon$$

と

$$(\forall n\in\mathbb{N}:n\geq N_2)\,|c_n-A|<\varepsilon$$

が同時に成り立つ。$N:=\max\{N_1,N_2\}$ とおくと、$N\in\mathbb{N}$ であり、$n\in\mathbb{N}$ が $n\geq N$ を満たすならば、

$$|a_n-A|<\varepsilon\quad\wedge\quad|c_n-A|<\varepsilon$$

が成り立つ。このとき ($-\varepsilon<a_n-A<\varepsilon\wedge-\varepsilon<c_n-A<\varepsilon$ であるから)

$$A-\varepsilon<a_n\quad\wedge\quad c_n<A+\varepsilon.$$

(i) を用いると

$$A-\varepsilon<a_n\leq b_n\leq c_n<A+\varepsilon.$$

これから $A-\varepsilon<b_n<A+\varepsilon$. ゆえに $|b_n-A|<\varepsilon$. ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=A$.

講評 (2) にも部分点を与えたので、定義が書けている人の多くは、半分くらいの点が取れていた。

4.

(1) a を I の任意の要素とする。任意の正の数 ε に対して、$\delta:=\frac{\varepsilon}{|p|+1}$ とおくと、$\delta>0$ であり、$|x-a|<\delta$ を満たす任意の $x\in I$ に対して、

$$|f(x)-f(a)|=|(px+q)-(pa+q)|=|p(x-a)|=|p|\,|x-a|<|p|\,\delta\leq(|p|+1)\,\delta=\varepsilon.$$

ゆえに $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. これは $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ を示している。

(2) (くたびれてきたので、準備中。次回書きます。)

講評 (1) は、宿題に出した問題なのだけれど、実は出来は良くなかった。「論理式を左から読む順番に証明の中に登場する」ので、ε, δ, x の順になるはずなのだけれど、そうなっていない答案が多く、減点されて点が低かった。(2) は少し難しいのかも。出来た人はいなかった。

5.

(1) k を実数とするとき、$y=kx$ に沿った極限をしらべる。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+k^3x^2+x^2+k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1+k^3)x^3+(1+k^2)x^2}{(1+k^2)x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+k^3)x+(1+k^2)}{1+k^2}=\frac{1+k^2}{1+k^2}=1.$$

これから収束するならば極限は 1 と分かる。

$$\left|\frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2}-1\right|=\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x^3|}{x^2+y^2}+\frac{|y^3|}{x^2+y^2}=|x|\frac{x^2}{x^2+y^2}+|y|\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

$x^2\le x^2+y^2$, $y^2\le x^2+y^2$ であるから、

$$\left|\frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2}-1\right|\le|x|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+|y|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=|x|+|y|\to 0\quad((x,y)\to(0,0)).$$

ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2}=1.$$

(極座標も有効) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと、$(x,y)\to(0,0)$ のとき、$r\to 0$ であり、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta+r^2}{r^2}=\lim_{r\to 0}\left(r\cos^3\theta+r\sin^3\theta+1\right).$$

この極限は 1 である。実際

$$\left|\left(r\cos^3\theta+r\sin^3\theta+1\right)-1\right|=|r|\left|\cos^3\theta+\sin^3\theta\right|\le|r|\left(\left|\cos^3\theta\right|+\left|\sin^3\theta\right|\right)\le 2r\to 0\quad(r\to 0).$$

(2) 放物線 $kx=y^2$ に沿った極限を考えてみると解決します。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ kx=y^2}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

これは k に依存しているから、極限は存在しません。■

講評　ちょっとひねってある。例えば (1) で、直線 $y=kx$ に沿った極限を取ると、1 になるから、1 に収束する、と結論した人。→ これは毎年こういう勘違いをする人が多い、気をつけて下さい、と説明したパターンそのものなので、もちろん零点。「収束するならば極限は 1」と書いた答案には部分点をつけた。

それから

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

とする人が大勢いたけれど、左辺はつねに 0 以上で、右辺は負になりうるので明らかに間違い。それから

$$\frac{1}{x^2+y^2}\le\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$$

とする人もいたけれど、これはひどい間違いである。$1\le x^2+y^2$ はつねに成り立つ不等式ではない。上で使っている、$x^2\le x^2+y^2$, $y^2\le x^2+y^2$ を良く吟味するように。

(2) でも $y=kx$ に沿った極限を取ると、0 になるが、結論は「極限なし」である。$kx=y^2$ とおくのは、ちょっと気が付かないかも。

$x=r\cos\theta$, $y^2=r\sin\theta$ と置いた人がいて、気持ちはわからないでもないけれど、それはそれでていねいに (θ をどうすべきかとか、$(x,y)\to(0,0)$ のとき、$r\to 0$ とすれば良いのかどうかとか) 議論しないといけない。■

6.　この問題については、講義ノート等を見て下さい。

7.

(1) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。Ω が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、

$$(\forall x \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) \quad B(x;\varepsilon) \subset \Omega$$

が成り立つことをいう。

(2) 任意の x に対して、$x \in \emptyset$ は偽であるから、$x \in \emptyset \Rightarrow B(x;\varepsilon) \subset \emptyset$ は真である。ゆえに

$$(\forall x \in \emptyset)(\exists \varepsilon > 0) \quad B(x;\varepsilon) \subset \emptyset$$

が成り立つ。ゆえに $\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\varepsilon = 1$ とするとき、$\varepsilon > 0$ であり、$B(x;\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ が成り立つ。ゆえに $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(3) (講義で、開集合の簡単な判定法を紹介した。$\mathbb{R}^n$ 上の連続関数と、等号の付いていない不等式を使って集合を定義すれば開集合になる。それをするのが簡単だろう。開区間とは、開球とか、第 1 象限とか、2 次元の開区間 $(a,b) \times (c,d)$ とか、$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ とか。次の解答例では、n 次元の例をあげてみる。)

$\Omega = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$ とおくと、Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(証明 1) $f(x_1, \cdots, x_n) = x_1$ とおくと、$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は多項式関数であるから、連続である。$\Omega = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \cdots, x_n) > 0\}$ であるから、授業で習った定理により、Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(証明 2) $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$ とすると、$x_1 > 0$. $\varepsilon := x_1$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、$B(x;\varepsilon)$ に属する任意の y に対して、$|y_1 - x_1| \le |y - x| < \varepsilon = x_1$ であるから、$-x_1 < y_1 - x_1 < x_1$. ゆえに $0 < y_1$. ゆえに $y \in \Omega$. これは $B(x;\varepsilon) \subset \Omega$ を示しているので、Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。 ■