数学解析 第13回メモ

桂田 祐史

2017 年 7 月 10 日, 2017 年 7 月 11 日

今日は宿題を出した。

後 2 回。

例 0.1 (第 1 象限は $\mathbb{R}^2$ の開集合) 第 1 象限 (軸は含まない) は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。実際

$$\Omega := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x>0\wedge y>0\right\}$$

は

$$\Omega=\Omega_1\cap\Omega_2,\quad \Omega_1 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x>0\right\},\quad \Omega_2 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; y>0\right\}$$

であり、Ω_1 と Ω_2 は、ともに、$\mathbb{R}^2$ 上の連続関数 >0 という条件で定められる集合であるから、$\mathbb{R}^2$ の開集合である。ゆえに $\Omega=\Omega_1\cap\Omega_2$ も $\mathbb{R}^2$ の開集合である。■

例 0.2 (三角形の内部は $\mathbb{R}^2$ の開集合) $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形の内部

$$\{(x,y)\mid x>0\wedge y>0\wedge\wedge x+y<1\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。任意の三角形の内部は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。■

例 0.3 (1 点からなる集合の補集合は $\mathbb{R}^n$ の開集合) $c\in\mathbb{R}^n$ とするとき

$$\Omega := \mathbb{R}^n\setminus\{c\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。実際、$x\mapsto |x-c|^2$ は $\mathbb{R}^n$ 上定義された連続関数であり、

$$\Omega=\left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; |x-c|^2>0\right\}$$

が成り立つので、Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。■

$\mathbb{R}^n$ の開集合でないことの証明はどうすれば良いか？

$$\Omega \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の開集合である} \quad\Leftrightarrow\quad (\forall a\in\Omega)(\exists\varepsilon>0)B(a;\varepsilon)\subset\Omega$$

であるから

$$\begin{aligned}\Omega \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の開集合でない} &\Leftrightarrow (\exists a\in\Omega)(\forall\varepsilon>0)B(a;\varepsilon)\not\subset\Omega\\ &\Leftrightarrow (\exists a\in\Omega)(\forall\varepsilon>0)B(a;\varepsilon)\cap\Omega^c\neq\emptyset.\end{aligned}$$

この条件が成り立つことを証明するには、a は Ω の縁に取れば良い。

例 0.4 (閉球は開集合ではない) $c \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ とするとき、$\Omega = \overline{B}(c;r)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない。

実際、$a := c + r\boldsymbol{e}_1$ とおくと、$|a - c| = |r\boldsymbol{e}_1| = |r|\,|\boldsymbol{e}_1| = r \cdot 1 = r$ であるから、$a \in \overline{B}(c;r) = \Omega$.

ところが任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$x = a + \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{e}_1$ とおくと、$|x - a| = \left|\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{e}_1\right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ であるから、$x \in B(a;\varepsilon)$. ところが

$$x = a + \frac{\varepsilon}{2}e_1 = c + r\boldsymbol{e}_1 + \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{e}_1$$

であるから

$$|x - c| = \left|\left(r + \frac{\varepsilon}{2}\right)\boldsymbol{e}_1\right| = \left|r + \frac{\varepsilon}{2}\right| \cdot |\boldsymbol{e}_1| = r + \frac{\varepsilon}{2} > r.$$

ゆえに $x \notin \overline{B}(c;r) = \Omega^c$. ゆえに $x \in B(a;\varepsilon) \cap \Omega^c$. ゆえに $B(a;\varepsilon) \cap \Omega^c \neq \emptyset$. ゆえに Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない。 ■

定義 0.5 $F \subset \mathbb{R}^n$ とする。F が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるとは、F^c は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることをいう。

定理 0.6 (1) $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(2) 集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して F_λ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合、を満たすならば、$\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(3) F_1 と F_2 が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であれば、$F_1 \cup F_2$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

証明

(1) $(\emptyset)^c = \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n)^c = \emptyset$ はともに $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は、$\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(2) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、F_λ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるから、F_λ^c は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。ゆえに

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (F_\lambda^c)$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合の合併であるから、 $\mathbb{R}^n$ の開集合である。ゆえに $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ は、$\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(3) F_1 と F_2 は $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるから、F_1^c, F_2^c は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。ゆえに

$$(F_1 \cup F_2)^c = (F_1^c) \cap (F_2^c)$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合の共通部分であるから、 $\mathbb{R}^n$ の開集合である。ゆえに $F_1 \cup F_2$ は、$\mathbb{R}^n$ の閉集合である。 ■

定理 0.7 $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続であり、$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ とするとき、$F_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq \alpha\}$, $F_2 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \beta\}$, $F_3 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq f(x) \leq \beta\}$, $F_4 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \gamma\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

証明

$$\begin{aligned}
&F_1^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \alpha\}, \\
&F_2^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \beta\}, \\
&F_3^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \alpha \vee f(x) > \beta\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \beta\}, \\
&F_4^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \gamma\}
\end{aligned}$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、F_1, F_2, F_3, F_4 は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。■

例 0.8 $F := \overline{B}(c; r)$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合。実際

$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |x - c|^2 \le r^2\right\}$$

であるから。■

例 0.9 $F := \{c\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。実際

$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |x - c|^2 = 0\right\}$$

であるから。■

例 0.10 (開球は閉集合ではない) $F := B(c; r)$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合ではない。それを示すには、

$$F^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - c| \ge r\}$$

が $\mathbb{R}^n$ の開集合ではないことを示せば良い。$a = c + r\boldsymbol{e}_1$ とおくと、$|a - c| = r$ であるから、$a \in F^c$. ところが $0 < \varepsilon < r$ を満たす任意の ε に対して、

$$x = a - \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{e}_1$$

とおくと、

$$|x - c| = \left|c + r\boldsymbol{e}_1 - \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{e}_1 - c\right| = \left|\left(r - \frac{\varepsilon}{2}\right)\boldsymbol{e}_1\right| = \left|r - \frac{\varepsilon}{2}\right| |\boldsymbol{e}_1| = r - \frac{\varepsilon}{2} < r$$

であるから、$x \in (F^c)^c$. ゆえに $B(c; \varepsilon) \not\subset F^c$. これは F^c が開集合でないことを意味している。ゆえに F は閉集合ではない。■

命題 0.11 $F \subset \mathbb{R}^N$ に対して、次の (i),(ii) は同値である。

(i) F は $\mathbb{R}^N$ の有界な閉集合である。

(ii) F 内の任意の点列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ で収束するならば、その極限は F に属する。

証明

(i)⇒(ii) (i) を仮定する。F は $\mathbb{R}^N$ の閉集合で、$\{a_n\}$ は F 内の点列、$a \in \mathbb{R}^N$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とする。$a \in F$ を背理法で示そう。$a \notin F$ とすると、$a \in F^c$ で、F^c は $\mathbb{R}^N$ の開集合であるから、

$$(\exists \varepsilon > 0) B(a; \varepsilon) \subset F^c.$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より、十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n \in B(a; \varepsilon)$ となる。ゆえに $a_n \in F^c$. ところが $a_n \in F$ であるから矛盾する。ゆえに $a \in F$. ■

(ii)⇒(i) (ii) を仮定して、(i) を背理法で示す。F が閉集合でないと仮定すると、F^c は開集合ではないので、

$$(\exists a \in F^c)(\forall \varepsilon > 0) B(a;\varepsilon) \not\subset K^c.$$

これは $B(a;\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ を意味する。$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して、$\varepsilon := \dfrac{1}{n}$ として、これを用いると $a_n \in B(a; \frac{1}{n}) \cap F$ となる a_n が取れる。こうして作った $\{a_n\}$ は F 内の点列で、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たす。(ii) を仮定しているので $a \in F$. これは $a \in F^c$ に矛盾する。■

定理 0.12 (Weierstrass の最大値定理 (多次元板)) K は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合、$f\colon K \to \mathbb{R}$ は連続とするとき、f の K における最大値、最小値が存在する。

証明 1次元のときとほぼ同様にして、

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{x\in K} f(x)$$

を満たす K 内の点列 $\{x_n\}$ が存在する。K は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理によって、収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。$c := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ とおくと、

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \sup_{x\in K} f(x).$$

K は閉集合であるから、上の命題より、$c \in F$ である。f は c で連続であるから、

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c).$$

ゆえに

$$f(c) = \sup_{x\in K} f(x).$$

これは $f(c)$ が最大値であることを示している。■

少し時間的余裕を得たので、将来知っておくと良さそうな事実を紹介した。

定理 0.13 (コンパクト集合の特徴づけ) $K \subset \mathbb{R}^N$ について、次の (i), (ii), (iii) は互いに同値である。

(i) K は有界閉集合である。

(ii) K 内の任意の点列 $\{a_n\}$ は収束部分列を持ち、その極限は K に属する。

(iii) K はコンパクトである。

「コンパクト」という言葉は「トポロジー」で学ぶ。ここではその説明を省略し、(i) ⇔ (ii) のみ証明する。

証明

(i)⇒(ii) Bolzano-Weierstrass より収束部分列を持つ。閉集合であるから、その極限は K に属する。

(ii)⇒(i) (ii) を仮定する。K が閉集合であることは簡単に分かる (省略する)。K が有界であることを背理法で証明する。K が有界でないと仮定すると、

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists a_n \in K) \quad |a_n| > n.$$

こうして作った $\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は、

$$|a_{n_k}| > n_k \geq k$$

を満たすので収束しない (収束するならば有界のはずだが、非有界なので)。 ■