数学解析 第12回メモ

桂田 祐史

2017 年 7 月 3 日, 2017 年 7 月 11 日

今日も宿題を出していない。

今日を入れて、後 3 回。去年より 1 回分少なく、積分の話 (「閉区間上の連続関数は積分可能」) で終わり。今日の話を含めて、講義ノートに書いてあることを出ない。期末試験は、最後の授業のちょうど一週間後にする予定である。

宿題は後一つ (開集合と閉集合) 出す。

平均値の定理、Taylor の定理

平均値の定理と、Taylor の定理を書いて、以下のことを注意した。

- 平均値の定理は、 Rolle の定理を一般化したものである。
- Taylor の定理は、平均値の定理を一般化したものである ($k = 1$ とすると、ほぼ平均値の定理)。
- 平均値の定理の証明は簡単。Taylor の定理は、ややトリッキーな証明しかない (？)。いずれにしても、Rolle の定理に帰着させる。微積分のテキストに載っている通りで、「数学解析」としては、付け足すことはないので省略する。
- これが重要：平均値の定理にしても、Taylor の定理にしても、存在定理 (何かの存在を主張する定理) である。Rolle の定理の c は、さかのぼると、数列の極限で、数列の極限の存在を示すことが大事だった。

Weierstrass の最大値定理を多次元の場合に一般化するのがこれからしばらくの目標である。それは「K を $\mathbb{R}^n$ の有界な閉集合とする。$f\colon K \to \mathbb{R}$ が連続ならば、f の最大値、最小値が存在する。」というもので、「閉集合」という概念が必要になる。

開集合、閉集合

$\mathbb{R}^n$ の開集合の定義を書く。

$B(a;\varepsilon)$ という記号が出て来る。その定義と「$\mathbb{R}^n$ の開球」という呼び名を紹介する。$n = 1$ のとき、$n = 2$ のとき、$n = 3$ のとき、図を描いて説明する。

ついでに「$\mathbb{R}^n$ の閉球」という言葉。

$\mathbb{R}^n$ の開集合のイメージ。自分の縁の点を一つも含まない集合は $\mathbb{R}^n$ の開集合。なぜなら a と縁までの距離は正で、$\varepsilon > 0$ をそれ以下に取れば、$B(a;\varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つから。

一方、自分の縁の点を一つでも含む集合は、$\mathbb{R}^n$ の開集合ではない。a を縁から選ぶと、$\varepsilon > 0$ をどんなに小さく取っても、$B(a;\varepsilon)$ は Ω をはみ出すので、Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない。

簡単な例: $\mathbb{R}^n$ の開球は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。$\mathbb{R}^n$ の閉球は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない。1 点からなる集合 $\{c\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない (こういうのは、縁が何か分かりにくいかもしれないので、定義の条件が成り立つか論理的に判断するしかない。)。証明は後回しにして進む。

定理を 2 つ。

一つは、開集合系の公理、あるいは位相の公理と呼ばれるもの。今年はどれもきちんと証明した (こうしているので、昨年よりも時間がかかっているのだろう…)。(2) について、$\Lambda = \{1, 2\}$ のとき、「U_1 と U_2 が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば、$U_1 \cup U_2$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合」となることを説明した。(3) については図を描いた。

もう一つ、$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続であるとき、$\Omega_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < f(x) < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \gamma\}$ が開集合である。

Ω_1 については、ゆっくりと証明した。

$$
\begin{aligned}
f(x) < \beta \quad &\Leftrightarrow \quad -f(x) > -\beta, \\
\alpha < f(x) < \beta \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) > \alpha \wedge f(x) < \beta, \\
f(x) \neq \gamma \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) > \gamma \vee f(x) < \gamma.
\end{aligned}
$$

そうして、「$\mathbb{R}^n$ の開球は $\mathbb{R}^n$ の開集合である」の証明。

$$
|x - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x - a|^2 < \varepsilon^2,
$$

$$
f(x) := |x - a|^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2
$$

これは多項式関数なので、$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続である。

きちんと話すと、あまりスピードを出せない。。。。