数学解析 第11回メモ

桂田 祐史

2017年6月26日, 2017 年6 月26 日

今日も宿題を出していない。

まず、前回の続き。

$\mathbb{R}^N$ の点列の収束についての話をするが、記述の簡単化のため $N=2$ とする。$\{\boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ の点列であるとき、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。

0. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が収束列 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束列

1. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が有界

2. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が Cauchy 列

(0) は前回証明済みである。

証明 (1) 一般に

$$|a_n|, |b_n| \le |\boldsymbol{a}_n| \le \sqrt{2}\max\{|a_n|, |b_n|\}$$

が成り立つ。これからすぐ分かる。

(2) 一般に

$$|a_n - a_m|, |b_n - b_m| \le |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_m| \le \sqrt{2}\max\{|a_n - a_m|, |b_n - b_m|\}$$

が成り立つ。これからすぐ分かる。■

定理 0.1 ($\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理) $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ の有界な点列ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ の部分列で、$\mathbb{R}^N$ で収束するものが存在する。

定理 0.2 ($\mathbb{R}^N$ の完備性) $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ の Cauchy 列ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ は収束する。

前者の証明 ほぼ講義ノートの命題 5.16 (p. 63) の通り。■

$\mathbb{R}^2$ で証明したが、同じやり方で、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathbb{R}^N$ で証明出来る。

講義ノートの例題 5.1 の説明。

§6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版) に入る。

「この講義の中で一番重要な結果である。」

以下、$[a,b]$ と書いたら、$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ である。

定理 0.3 (講義ノートの定理 6.1 (p. 64)) $K=[a,b]$ とする。$f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続とするとき、f の K における最大値が存在する。すなわち

$$(\exists c\in K)(\forall x\in K)\quad f(c)\geq f(x).$$

(関数 f の K における最大値というのは、$\mathbb{R}$ の部分集合 $f(K)$ の最大値のことである。)

証明はやはり講義ノートの通り。最後少し詳し目にした (講義ノートの方を直す)。$S\neq\infty$, S は $f(K)$ の上限である。ゆえに $S=f(c)$ は $f(K)$ の最大値である。 ■

証明の途中で $c\in K$ を示したが、その部分が多次元化するときに問題になる、と言っておいた。

講義ノートの例 6.3, 6.4, 6.5, 6.6、それに加えて、$K=[0,\infty)$, $f(x)=x$ の場合に、$\sup f(K)=\infty$, $\max f(K)$ は存在しない、という 5 つの例を説明した。

例	K は閉区間？	f は連続	$\sup f(K)$	$\max f(K)$
1	○	×	1	存在しない
2	×	○	1	存在しない
3	×	○	∞	存在しない
4	×	○	$\frac{\pi}{2}$	存在しない
5	×	○	∞	存在しない

K が閉区間という条件が成立しないと、最大値の存在が導かれない場合が、たくさんある。

§7 に入る。

講義ノート p. 11 の図 1 (この講義前半の主要な定理の間の関係) の下半分部分を書いた。つまり Weierstrass の定理から、Rolle の定理が導かれ、それから、平均値の定理、Taylor の定理、さらには、$f'\geq 0\Rightarrow f$ は単調増加、$f'\equiv 0\Rightarrow f$ は定数、など微積分における基本的な定理が導かれる。

この講義 (今日 10 回目と言ったけれど、数え間違いで、11 回目だ) は、これまであまりわき道にそれずに進めて来たけれど、ようやく Rolle の定理まで到達できた。

Rolle の定理 (講義ノート命題 7.3, p. 66) を書いて証明する。

7 分程度時間が余ったけれど、息切れしているので、今日はここまで。