数学解析 第9回メモ

桂田 祐史

2017年6月12日, 2017 年6 月12 日

今日は宿題を出していない。

今日は明高の生徒達が来るかもしれない…でも特別なことをする余裕もなく。
WWWサイト[1] だけ紹介しておいた。
まず宿題6[2]の回収。
宿題6で使いたくなるから、ということで ∞ のからむ lim について。
$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{\Omega}$ とする時

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad (\forall U\in\mathbb{R})(\exists\delta>0)(\forall x\in\Omega:|x-a|<\delta)f(x)>U$$

と定義する。

命題 0.1 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{\Omega}$ とするとき、以下の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ であれば、$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$.

(2) $(\forall x\in\Omega)\ f(x)>0$, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=0$ であれば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

(1) だけ証明してみた (略)。
問6の (1) から (7) までを解説した (略)。
Mathematica でグラフを描いてみよう。

```
Plot3D[Sin[x y]/(x y),{x,-1,1},{y,-1,1}]

Plot3D[x y/(x+y),{x,-1,1},{y,-1,1}]

Plot3D[Abs[x y]/(Abs[x]+Abs[y]),{x,-1,1},{y,-1,1}]
```

2変数関数は、その関数がどんな関数か分かりにくい。$y=kx$ に沿った極限を取るのは、次元を落として計算しやすくする工夫である。コンピューターがあるならば、グラフを描いてみるのも良いかも。
結構時間を使ってしまったので、宿題の解説の残りは次週に回す。
§5「 極限の存在」に入る。5.1 区間縮小法。
ほぼ講義ノート通り。
減少閉区間列の形で表した定理 A.

[1] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/
[2] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi6.pdf

念のため

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in I_n\}$$

と復習しておく。

閉区間であることは重要である。$I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ とすると、

$$I_1 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

であるが、

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset.$$

もし $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ であれば、

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}.$$

数列を使って表現し直した定理 B

定理 0.2 $\{a_n\}$ は単調増加数列、$\{b_n\}$ は単調減少数列で、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \le b_n$$

が成り立つとき、次の (1),(2) が成立する。

(1) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は収束し、極限をそれぞれ A, B とするとき

$$A \le B,$$

それと

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \le A \wedge B \le b_n$$

が成り立つ。

(2) $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ であれば、$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

証明 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n \le b_n \le b_1$$

であるから、$\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるので、収束する。極限を A とすると、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le A$$

が成り立つ (証明したとき $A = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ であることが分かっている)。

同様に $\{b_n\}$ は、下に有界な単調減少数列であるので、収束する。極限を B とすると、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad B \le b_n$$

が成り立つ。

一方、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \le b_n$ であったから、$A \le B$.

もし $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$ であれば、

$$B - A = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

であるから、$A = B$. ■

定理 A の証明は、$[A,B] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ であることに注意すれば良い。
§5.2 中間値の定理。

定理 0.3 $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0,\ f(b) < 0$ とするとき、ある実数 $c \in (a,b)$ が存在して、$f(c) = 0.$

証明

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

とおく。もし $f(c_0) > 0$ ならば、

$$a_1 := c_0, \quad b_1 := b_0$$

とおく。またもし $f(c_0) \leq 0$ ならば

$$a_1 := a_0, \quad b_1 := c_0$$

とおく。いずれの場合も

$$c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$$

とおく。
以下、同じ操作を続けて、$\{a_n\}, \{b_n\}$ を作ったとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \leq 0$$

が成り立つ。区間縮小法から、$\{a_n\}, \{b_n\}$ は共通の極限 $c \in (a,b)$ に収束する。
$a_n \to c$ であり、f は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0.$$

$b_n \to c$ であり、f は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0.$$

以上から $f(c) = 0.$ ■