数学解析 第8回メモ

桂田 祐史

2017年6月5日, 2017 年6 月5 日

今日は宿題6[1] を出しました。

まず宿題5の回収。

前回やり残しの命題

命題 0.1 $n \in \mathbb{N}$

(1) 定数関数 $f_c \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_c(x) = c$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ は連続。

(2) 任意の $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、$\varphi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi_i(x) = x_i$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ は連続。

証明 (1) 任意の $a \in \mathbb{R}^n$ に対して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|f_c(x) - f_c(a)| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon.$$

これから明らかである ($\delta := 1$ とおけば$\cdots$)。
(2) 任意の $a \in \mathbb{R}^n$, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(a)| = |x_i - a_i| \le |x - a|$$

であることが分かる。そこで次のように証明すれば良い。
任意の正の数 ε に対して、$\delta := \varepsilon$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

であるから、$\lim_{x \to a} \varphi_i(x) = \varphi_i(a)$. ゆえに φ_i は a で連続である。a は任意であるから、φ_i は $\mathbb{R}^n$ で連続である。 ■

宿題5の解説

(省略。)

[1] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi6.pdf

多変数の関数の極限についての注意

極限についての性質は 1 変数関数と同様に済むことが多いが、注意が必要な場合もある。それについて 2 変数、実数値の関数で説明する。

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{R}$ とするとき

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall(x,y) \in \Omega : |(x,y)-(a,b)| < \delta) \quad |f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

$(x,y) \to (a,b)$ とするとは、xy 平面における (x,y) と (a,b) の距離を 0 に近づけるということである。

1 変数の場合、x を a に近づけるには、右から近づける場合と、左から近づける場合に分けて考えれば良かった。(右極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ と左極限 $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ がともに A に等しければ、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し、 A に等しい)。

多変数の場合は、色々な近づけ方がある。と言って、水平方向から近づける場合、垂直方向から近づける場合、斜めから近づける場合、螺旋を巻きながら近づける場合、4 つの場合を板書してみた。

例 0.2 (有名な例) $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

で定めると、これは有理関数であり、Ω で連続である。

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を調べる。

まず、x 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

同様に、y 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

一方、任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して、直線 $y = kx$ に沿って $(0,0)$ に近づけると、

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

この結果が k に依存することから、 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しないことが分かる (厳密には以下の命題 0.3)。 ■

関数が極限を持つならば、それを制限した関数も同じ極限を持つ。具体的には次の定理が成り立つ。

命題 0.3 $\emptyset \neq \Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{a} \in \overline{\Omega'}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^m$, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{A}$ が成り立つとき、

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f|_{\Omega'}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}.$$

この左辺のことを $\displaystyle\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}\in\Omega'}} f(x)$ と表す。

証明　仮定より、任意の正の数 ε に対して、ある正の数 δ が存在して、

$$(\forall x \in \Omega : |x-a| < \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つ。$\Omega' \subset \Omega$ であるから

$$(\forall x \in \Omega' : |x-a| < \delta) \quad \left| f|_{\Omega}(x) - A \right| < \varepsilon$$

が成り立つ ($f|_{\Omega}(x) = f(x)$ であることに注意)。以上から、$\lim_{x \to a} f|_{\Omega'}(x) = A$. ■

例 0.4 $f \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

とするとき、f は有理関数であり、$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で連続である。
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を調べよう。
授業でははしょって省略したが、任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=kx}} f(x,y) = 0$$

が成り立つ。これから、もしも極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在するならば、それは 0 であることが分かる (命題 0.3)。

$$|f(x,y) - 0| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} = |y| \frac{x^2}{x^2+y^2} \le |y| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |y|\,.$$

$(x,y) \to (0,0)$ のとき、$|y| \to 0$ であるから、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0. \blacksquare$$