数学解析 第6回メモ

桂田 祐史

2017年5月22日, 2017 年 5 月 22 日

今日は宿題回収のみで、宿題を出していません。

まず宿題4の回収。

前回やりかけの命題の証明

前回

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B, \quad B \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

の証明の途中で時間切れだった。前回、予備的考察として、

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| = \frac{|f(g)B - AB + AB - Ag(x)|}{|g(x)|} \le \frac{|f(x)-A|}{|g(x)|} + \frac{|A|\,|g(x)-B|}{|g(x)|}$$

という不等式を示し、また証明の第1段で

$$(*) \qquad (\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in I : |x-a| < \delta_1) \quad g(x) \neq 0 \wedge \frac{1}{|g(x)|} \le \frac{2}{|B|}$$

を示してある。

証明の第2段 $f(x) \to A$ であるから、ある正の数 δ_2 が存在して、

$$(\forall x \in I : |x-a| < \delta_2) \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{|B|}}.$$

また、$g(x) \to B$ であるから、ある正の数 δ_3 が存在して、

$$(\forall x \in I : |x-a| < \delta_3) \quad |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2|A|+1}{|B|}}.$$

(青い字の部分は、授業では、次の「$(*)$ を代入した」と書いてあるところまで導いてから、書いた。)

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して、

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| &\le \frac{|f(x)-A|}{|g(x)|} + \frac{|A|\,|g(x)-B|}{|g(x)|} \\
&\le \frac{2}{|B|}\,|f(x)-A| + \frac{2|A|}{|B|}\,|g(x)-B| \qquad ((*) \text{ を代入した}) \\
&< \frac{2}{|B|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{|B|}} + \frac{2|A|}{|B|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2|A|+1}{|B|}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2|A|}{2|A|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$. ■

宿題４の解説

黒板の前であたふたしたので、補足も加えて少していねいに書いておく。

(1) 任意の正の数 ε に対して、ある正の数 δ が存在して、$|x-a|<\delta$ を満たす任意の $x\in I$ に対して、$|f(x)-A|<\varepsilon$ が成り立つ。

$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)\ (\forall x\in I\colon\ |x-a|<\delta)\ |f(x)-A|<\varepsilon.$ あるいは $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)$ $(\forall x\in I)\ |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$

(2) (a) a を任意の実数、ε を任意の正の数とする。$\delta:=\varepsilon/2$ とおくと、$\delta>0$ であり、$|x-a|<\delta$ を満たす任意の実数 x に対して

$$|f(x)-f(a)|=|(-2x+3)-(-2a+3)|=|-2(x-a)|=|-2|\,|x-a|=2\,|x-a|<2\delta=\varepsilon.$$

ゆえに $|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$ これは $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ を示している。

(b) a を任意の実数、ε を任意の正の数とする。$\delta:=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2|a|+1},1\right\}$ とおくと、$\delta>0$ であり、$|x-a|<\delta$ を満たす任意の実数 x に対して

$$|x+a|=|x-a+2a|\le|x-a|+|2a|<\delta+2|a|\le 1+2\,|a|\,,$$
$$|f(x)-f(a)|=\left|x^2-a^2\right|=|x-a|\,|x+a|<\delta\,(1+2\,|a|)\le\frac{\varepsilon}{2\,|a|+1}\,(1+2\,|a|)=\varepsilon.$$

ゆえに $|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$ これは $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ を示している。 ■

- δ の取り方は色々ある。上のは一例である。
- 過去の経験によると、(2)(a) で $\delta=\dfrac{\varepsilon}{-2}$ とする人が結構いる。それだと $\delta>0$ とならない。また $|-2(x-a)|=2\,|x-a|$ であって、$|-2(x-a)|=-2\,|x-a|$ ではない。
- (2)(b) は分かりにくかもしれない。どうやって δ を発見したか説明してみる。$f'(a)=2a$ であるから、(2)(a) を解答済みであれば、最初に $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2|a|+1}$ が頭に浮かびそう。とりあえず、そうすると

$$|x-a|<\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x)-f(a)|=|x-a|\,|x+a|<\frac{\varepsilon}{2\,|a|+1}\cdot|x+a|\,.$$

これを見ると、
$$\frac{|x+a|}{2\,|a|+1}$$
を上から抑える必要が見えて来る。

$$|x+a|=|(x-a)+2a|\le|x-a|+2\,|a|$$

と評価すると
$$\frac{2\,|a|+|x-a|}{2\,|a|+1}$$
を上から抑えたくなり、$|x-a|\le 1$ とすることが浮かんで来る。ここまで来ると、$\delta:=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2|a|+1},1\right\}$ とすれば良いだろう、と分かる。 ■

$f(x)=x^2$ も案外難しかった。前回やった (3) $\lim_{x\to a} f(x)=A$, $\lim_{x\to a} g(x)=B$ ならば、$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=AB$ を用いれば、次のような証明が出来る。

証明の仕方を限定されない場合の、お勧めの証明

$F(x)=x$, $g(x)=x$ とおくと、$\lim_{x\to a} F(x)=a$, $\lim_{x\to a} g(x)=a$, $f(x)=F(x)g(x)$ であるから、

$$\lim_{x\to a} f(x)=a\cdot a=a^2=f(a).$$

連続性

I は $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I\to\mathbb{R}$ とする。

(1) $a\in I$ とする。f が a で連続であるとは、$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ が成り立つことをいう。

(2) f が I で連続であるとは、任意の $a\in I$ に対して、f が a で連続であることをいう。

(2) は、「$J\subset I$ とする。f が J で連続であるとは、$\cdots$」とするべきかもしれない。
これまでの例にあげたことから、次のことが分かる。

- 定数関数、1 次関数, $f(x)=x^2$ は $\mathbb{R}$ で連続
- $f(x)=\dfrac{3x+4}{x+2}$ $(x\neq -2)$ は、任意の a (ただし $a\in\mathbb{R}$, $a\neq -2$ とする) で連続あることも分かる。実際、
$$\lim_{x\to a}(x+2)=a+2,\quad \lim_{x\to a}(3x+4)=3a+4$$
であり、$a+2\neq 0$ であるから、今日の最初に証明した (4)「$\lim_{x\to a} f(x)=A$, $\lim_{x\to a} g(x)=B$, $B\neq 0\Rightarrow \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$」を用いて、
$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{3x+4}{x+2}=\frac{3a+4}{a+2}=f(a).$$

同様にして連続性が示せる場合が多いことが困難なく分かると思う。次項できちんと一般化しよう。

§3.3 “多項式関数”, 有理関数は連続である

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\quad (n\in\mathbb{N}\cup\{0\};\ a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n\in\mathbb{R})$$

の形の式を、x の (実係数) 多項式と呼ぶ。高校数学で整式と呼んだもののこと。1 つの項しかなくても多項式と呼ぶ。x の実係数多項式全体を $\mathbb{R}[x]$ で表す。

例として

$$0,1,\pi,x+2,\pi x^3+ex^2+\log 2\in\mathbb{R}[x],$$
$$\frac{3x+4}{x+2},x^{-2},\sqrt{x},\sin x\notin\mathbb{R}[x].$$

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}\quad (P(x),Q(x)\in\mathbb{R}[x],\ P(x)\neq 0)$$

の形の式を、x の (実係数) 有理式と呼ぶ。要するに、分母と分子が多項式である分数式のことである。x の実係数有理式全体を $\mathbb{R}(x)$ で表す。

多項式は有理式である: $0,1,\pi,x+2,\pi x^3+ex^2+\log 2\in\mathbb{R}(x)$.

$$\frac{3x+4}{x+2},x^{-2}\in\mathbb{R}(x),\quad \sqrt{x},\sin x\notin\mathbb{R}(x).$$

多項式、有理式の定める関数をそれぞれ "多項式関数", 有理関数と呼ぶ。(式と関数を区別している。) 定義域は特に断りのない限り、式が意味を持つような実数全体の集合とする。

つまり

- $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ のとき、$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=P(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ で定める。
- $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ $(P(x),Q(x)\in\mathbb{R}[x],\ P(x)\neq 0)$ のとき、$f\colon I\to\mathbb{R}$ を $f(x)=R(x)$ $(x\in)$ で定める。ただし
$$I:=\{x\in\mathbb{R}\mid P(x)\neq 0\}.$$

定理

(1) 多項式関数は $\mathbb{R}$ 全体で連続である。(2) 有理関数は ($\mathbb{R}$ から、分母が 0 になる点を除いた集合を定義域として) 連続である。

すでに、定数関数 $f(x)=c$, 恒等写像 $f(x)=x$ が連続であることの証明は、実質的に済ませてある。

補題 0.1 (1) 定数関数 $f(x)=c$ $(x\in\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ で連続である。(2) $f(x)=x$ $(x\in\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ で連続である。

(任意の正の数 ε に対して、(1) は $\delta:=1$, (2) は $\delta:=\varepsilon$ と δ を決めれば良かった。)

補題 0.2 I は $\mathbb{R}$ の区間、$a\in I$, $f\colon I\to\mathbb{R}$, $g\colon I\to\mathbb{R}$. f と g は a で連続ならば、$f+g$, $f-g$, fg も a で連続である。さらに $g(a)\neq 0$ ならば、$\dfrac{f}{g}$ も a で連続である。

定理の証明 (あらすじ): 多項式関数は、定数関数と $f(x)=x$ から、積と和を取ることを有限回繰り返すことで得られるから、連続である。

(もう少し詳しくやると: 「連続関数の積は連続である」から、任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して、$f(x)=x^k$ が $\mathbb{R}$ で連続であることが、帰納法で証明出来る。定数関数は連続であるから、任意の実数 c に対して、$f(x)=cx^k$ も $\mathbb{R}$ で連続である。ゆえに

$$(☆)\qquad f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

は、$n+1$ 個の連続関数の和であるから連続である (これも厳密には帰納法だな)。授業では、(☆) をうっかり $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ と書いてしまって、学生から質問がありました。申し訳ない。)

有理関数 f に対して、$P(x),Q(x)\in\mathbb{R}[x]$, $P(x)\neq 0$ が存在して、$f(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ $(x\in I:=\{x\in\mathbb{R}\mid P(x)\neq 0\})$. の形をしている。任意の $a\in I$ に対して、多項式関数は $\mathbb{R}$ 全体で連続であることから $\lim_{x\to a}P(x)=P(a)$, $\lim_{x\to a}Q(x)=Q(a)$. 補題 2 から、

$$\lim_{x\to a}f(x)=\frac{Q(a)}{P(a)}=f(a).$$

このように基本的な関数から「組み立てた」関数について何か条件が成り立つことを証明するために、(1) 基本的な関数は条件を満たす、(2) 条件を満たす関数から組み立てた関数は条件を満たす、ことを確認する、というやり方はあちこちで良く出て来る (微分可能性や、C^k 級であることの証明など)。

§3.4 合成関数の極限と連続性

I と J は $\mathbb{R}$ の区間で、$f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$ のとき、$g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ を

$$g \circ f(x) := g\left(f(x)\right) \quad (x \in I)$$

で定め、f と g の合成関数と呼ぶ。

定理

> I と J は $\mathbb{R}$ の区間で、$f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $f(I) \subset J$, $b \in \overline{J}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$, $\lim_{y\to b} g(y) = c$ が成り立つならば、$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$.

証明　ε を任意の正の数とする。$\lim_{y\to b} g(y) = c$ より、ある正の数 δ_1 が存在して、

$$(\forall y \in J : |y - b| < \delta_1) \quad |g(y) - c| < \varepsilon.$$

$\lim_{x\to a} f(x) = b$ より、ある正の数 δ が存在して、

$$(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - b| < \delta_1.$$

このとき、$|x - a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して、$f(x) \in J$, $|f(x) - b| < \delta_1$ であるから、

$$|g\left(f(x)\right) - c| < \varepsilon.$$

これは $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$ を示している。 ■