数学解析 第5回メモ

桂田 祐史

2017年5月15日, 2017年5月22日

宿題 問4[1] を出しました。

§2「数列の極限 (1)」の締めくくり

前回「上に有界な単調増加数列は収束する」という定理を紹介して、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \quad (= e)$$

を説明した。部分和 s_n が上に有界 (前回 $s_n < 3$ を示した)、かつ単調増加 $s_n \le s_{n+1}$ ($\because$ $s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n!} > 0$) が確認できたので、定理が適用出来て、級数の和 ($\{s_n\}$ の極限) が存在することが分かる。

それでは

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

についてはどうか？残念ながらこの部分和は単調増加数列ではない。

$$s_1 > s_2 < s_3 > s_4 < \cdots$$

しかし、次の定理を使うと和が存在することが分かる。

命題「$\{a_n\}$ が単調減少数列で $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすならば $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する。」

ここで練習問題3 (http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/ren3.pdf) を配る。

Taylor 展開した時、$(-1)^n$ という因子は割とよく現れるので、この命題は結構役に立つ。講義ノートの問39 (解答は本日の時点で講義ノートの p. 123) にあるようにして証明した。

数列の極限のやり残し。

1. 等比数列がらみの極限。

   (1) $0 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 0$

   (2) $0 < r < 1$ かつ $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^k r^n = 0$

[1] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi4.pdf

(1) の証明。$h=\dfrac{1}{r}-1$ とおくと、$h>0$, $\dfrac{1}{r}=1+h$ であるから、

$$\frac{1}{r^n}=(1+h)^n=1+nh+\cdots\geq nh.$$

ゆえに

$$0<r^n<\frac{1}{nh}\to 0\quad(n\to\infty).$$

はさみ打ちの原理によって、$\lim r^n=0$.

(2) も同様に出来る。$k=1$ なら

$$\frac{1}{r^n}=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\geq\frac{n(n-1)}{2}h^2\sim\frac{n^2}{2}h^2.$$

きちんとやると $\dfrac{1}{r^n}\leq Cn^2$, すなわち $r^n\leq\frac{1}{Cn^2}$ を満たす C が存在することがわかる。ゆえに

$$0<nr^n\leq n\cdot\frac{1}{Cn^2}=\frac{1}{Cn}\to 0\quad(n\to\infty).$$

ゆえに $\lim nr^n=0$. $k>1$ の場合も同様に出来る。興味があれば講義ノート (現時点で問 34, 解答は p. 121) を見て下さい。

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n=\infty$ をまだ説明していなかったかも。「n を ∞ に近づけると、n は ∞ に近づく」というと当たり前のようだけど、そうではない。数列が ∞ に発散するというのを定義する必要がある。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ とは

$$(\forall U\in\mathbb{R})(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}:n\geq N)\quad a_n>U$$

が成り立つことをいう。

これから $a_n=n$ $(n\in\mathbb{N})$ とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ がわかる。任意の実数 U に対して、アルキメデスの公理から、$N>U$ を満たす $N\in\mathbb{N}$ が存在する。($a=1$, $b=|U|$ とおくと、$N\cdot 1>|U|$ を満たす $N\in\mathbb{N}$ が存在する。$|U|\geq U$ であるから $N>U$.)。このとき $n\in\mathbb{N}$ が $n\geq N$ を満たすならば、

$$a_n=n\geq N>U.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$. すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n=\infty$. ■

§3「関数の極限 (ε-δ 論法) と連続関数」

区間にその端点を加えた $\overline{I}$ について。講義ノート通り。

I が $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{I}$, $A\in\mathbb{R}$ とする。$x\to a$ のとき $f(x)$ が A に収束するとは、

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in I:|x-a|<\delta)\,|f(x)-A|<\varepsilon$$

が成り立つことをいう。

これを満たす A は存在するならば一つしかないので (これは数列の場合と同様に証明される)、$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ という記号で表し、$x\to a$ のときの $f(x)$ の極限と呼ぶ。

問　この機会に以下の定義を並べて書いてみよう。

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

(2) $\lim_{x\to a} f(x) = A$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

ちなみに $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ はまだ定義していないから書いておくと、

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x-a| < \delta) \quad f(x) > U.$$

例 0.1 $f(x) = c$ (定数関数) の場合に $\lim_{x\to a} f(x) = c$ となること。$\delta = 1$ で OK. ちゃんと書くと、「ε を任意の正数とする。$\delta := 1$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$|f(x) - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$ より、$|f(x) - c| < \varepsilon$. ゆえに $\lim_{x\to a} f(x) = c$.」 ■

例 0.2 $f(x) = x$ の場合に $\lim_{x\to a} f(x) = a$ となること。$\delta = \varepsilon$ で OK. ちゃんと書くと「ε を任意の正数とする。$\delta := \varepsilon$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$|f(x) - a| = |x - a| < \delta = \varepsilon$ より、$|f(x) - a| < \varepsilon$. ゆえに $\lim_{x\to a} f(x) = a$.」 ■

$f(x) = 2x$　ならば $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ とする。宿題の (2) (a) は $f(x) = -2x + 3$ の場合。
$f(x) = x^2$ はやってみよう。$f'(a) = 2a$ がヒント。
このあたりは、関数のグラフを描いて、$f(a) \pm \varepsilon$ の範囲に入るようにするには、x がこの範囲でないと、というような図を描いて説明した。この文書に図を入れるのが面倒なのでここには入っていません。

しかし次の定理を使うのが良い[2]。

命題 0.3 $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ のとき

(1) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B$

(2) $\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = A - B$

(3) $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = AB$

(4) $B \neq 0$ ならば $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

(細かいことだけれど、$\dfrac{f}{g}$ の定義域は $J := \{x \in I \mid g(x) \neq 0\}$ であり、これは $\mathbb{R}$ の区間であるとは限らないので、上の極限の定義の範囲外に出てしまうかもしれない。)

大筋は数列のときと同じ。数列のときは、(1) 和の場合, (3) 積の場合を証明したので、今回は (4) を証明してみる。
証明を書き出す前に、予備的な考察をする。

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{f(x)B - Ag(x)}{g(x)B}\right| = \left|\frac{f(x)B - AB + BA - Ag(x)}{g(x)B}\right| \\ &\leq \frac{|f(x) - A|}{|g(x)|} + \frac{|A|\,|B - g(x)|}{|g(x)|\,|B|}\end{aligned}$$

[2] $F(x) = x$, $g(x) = x$ とおくと、$f(x) = x^2 = F(x)g(x)$ であるから、$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} F(x) \lim_{x\to a} g(x) = a \cdot a = a^2 = f(a)$. 簡単である。具体的な関数で考える方が簡単とは限らない。

分子だけを見れば $|f(x)-A|$, $|B-g(x)|$ が任意に小さい数で抑えられることは明らかである。問題は $\dfrac{1}{|g(x)|}$ の評価である。$x \to a$ のとき $g(x) \to B$ で、$B \neq 0$ であることを用いると、適当な定数で上から抑えられる。

証明

第 1 段　まず $B \neq 0$ であるから $|B| > 0$ に注意しておく。$x \to a$ のとき $g(x) \to B$ であるから、ある正数 δ_1 が存在して、

$$(\forall x \in I : |x-a| < \delta_1) \quad |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}.$$

このとき、

$$|g(x)| = |g(x) - B + B| = |B| - |g(x) - B| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2} > 0.$$

ゆえに

$$g(x) \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|B|}.$$

(このあたりも、授業ではグラフを描いて説明した。)

第 2 段は次回。