数学解析 第4回メモ

桂田 祐史

2017年5月8日, 2017 年 5 月 8 日

今日は特に書き間違いが多かった。(教室も何となくうるさかったけれど、こちらも集中力がなかったのか？何にしても) 申し訳ない。

講義ノートで言うと §2.3, §2.4 のあたり。

- 今日は練習問題を配るつもりでいたけれど、話がそこまで進まないで、できなかった。
- まず宿題 3 を回収。
- $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ ならば $\lim(a_n b_n) = ab$ の証明。まず証明の前に予備的な考察。

証明は論理的な順番に書く。しかし考えるときはそうではない。

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\le |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &\le |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|\,. \end{aligned}$$

右辺の 2 項をそれぞれ $\frac{\varepsilon}{2}$ で抑えれば良い。

  – $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$ とすれば良い？$b = 0$ のときは??
  – $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2|a_n|}$ とすれば良い？実はダメ。右辺に n が残ってはいけない (☆)。

証明を書いた。

  – 「収束列は有界」という定理から、$|a_n| \le R$ を満たす R が存在することが ☆ の解決に役立つ。
  – 分母が 0 になるのを避けるために

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2\,(1+|b|)}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2\,(1+R)}$$

のように 1 を足しておく。後で $\dfrac{|b|}{1+|b|}$, $\dfrac{R}{1+R}$ というのが出て来るが、

$$x \ge 0 \quad \Rightarrow \frac{x}{1+x} < 1$$

が成り立つので大丈夫 (証明は $1+x > 0$, $x < 1+x$ であるから、$\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{1+x}{1+x} = 1$)。

- 問「$\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ を示せ。」講義ノートに解答は書いておいたので見たければ。

- 以上で、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+3}{3n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1+2\cdot 0+3}{3+2\cdot 0+3\cdot 0}=\dfrac{1}{3}$ が出来る。

- ここで宿題の解説。プリント作ったのに持ってくるのを忘れた。結構長くやってしまった (ミスか？)。以下は要点のみ。量称を含む論理式の否定の作り方。$p \Rightarrow q$ の否定が $p\wedge(\neg q)$ であること。

$$(\forall x : P_1(x))P_2(x) \quad \equiv \quad (\forall x)P_1(x) \Rightarrow P_2(x),$$

$$(\exists x : P_1(x))P_2(x) \quad \equiv \quad (\exists x)P_1(x) \wedge P_2(x).$$

- 問 「$\lim a_n = a$ ならば $\lim |a_n| = |a|$」を示せ。
(あらすじ) 一般に成り立つ不等式

$$\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$$

を用いれば簡単。清書は任せる。この不等式の証明をした。

$$|a| = |a-b+b| \le |a-b| + |b|$$

より

$$|a|-|b| \le |a-b|.$$

a と b を入れ替えた

$$|b|-|a| \le |b-a| \quad (=|a-b|)$$

が同様に成り立つ。これは

$$-|a-b| \le |a|-|b|$$

と同値であるから、

$$-|a-b| \le |a|-|b| \le |a-b|.$$

ゆえに ($|A|\le B \Leftrightarrow -B\le A\le B$ を用いて)

$$\big||a|-|b|\big| \le |a-b|.$$

- ここまでで四則と lim の話が済んだ。lim と大小関係の話をする。

- 命題

> $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束列で、極限をそれぞれa, b とする。また $(\forall n\in\mathbb{N})$ $a_n \le b_n$ が成り立つとする。この時 $a\le b$. (すなわち $\lim a_n \le \lim b_n$.)

の証明は、あらすじですませる。背理法を用いる。$a>b$ と仮定して、$\varepsilon=\dfrac{a-b}{3}$ とすると、$\varepsilon>0$. 十分大きな n に対して、$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$, $b-\varepsilon<b_n<b+\varepsilon$. この時 $b_n<a_n$ となる (図から明らか)。これは仮定 $a_n\le b_n$ に反する。

- 系として

> $\{a_n\}$ が収束列で、$U\in\mathbb{R}$, $(\forall n\in\mathbb{N})$ $a_n\le U$ が成り立つならば、$\lim a_n \le U$.

($b_n := U$ $(n\in\mathbb{N})$ とすれば良い。)

- 「はさみ打ちの原理」これは上の命題の系ではない。$\{b_n\}$ が収束することが仮定されていなくて、証明する必要がある。これも数直線上であらすじを示す。$A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$, $A-\varepsilon < c_n < A+\varepsilon$, $a_n \le b_n \le c_n$ から $A-\varepsilon < b_n < A+\varepsilon$. すなわち $|b_n - A| < \varepsilon$. 一応証明は清書した。

- メモには「$0 \le r < 1$ ならば $\lim r^n = 0$」を用意しておいたのだけど、これはカット。

- 「上に有界な単調増加数列は収束する」を述べて証明した。「Weierstrass の上限公理により」はサボらずに書いた (大事なので)。あまり順番を守った書き方はしなかった。良くなかったかも。

- 「この定理は重要である。」と板書する。極限の存在を示すのはこれまでなかった。その根拠が Weierstrass の上限公理である。

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ $(= e)$ について。収束することを示すのが大事である。$a_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ とおくと上の定理の仮定を満たす。

  (i)
$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} \le 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/2} = 3. \end{aligned}$$

  (ii)
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \quad \text{であるから} \quad a_n < a_{n+1}.$$