数学解析 第3回メモ

桂田 祐史

2017年4月24日, 2017年5月7日

宿題 問3[1] を出しました。

- 今日配るプリントは1枚。宿題3[2]
- まず宿題2を回収。
- §2「数列の極限(1)」。定義からすぐ分かること。「数学の方法」でやったはずで、「なぜそのように定義するか」は省略する。
- 目標: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{3n^2+2n+1}=\frac{1}{3}$ をきちんと理解する。
- この講義で数列というのは、実数列のこと。以下では単に数列と呼ぶ。数列は、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像のことである。
- $\{a_n\}$ が a に収束するとは。定義を日本語で書いた(記号化は宿題)。
- 宿題2の説明。$A=(2,3]$ の上限と下限。3 は A の最大値なので A の上限である。2 が A の下限であることは、前回の講義でやった「2 は $A=[1,2)$ の上限」の真似でできる。
- 極限の一意性。「$A\in\mathbb{R}$ が $(\forall\varepsilon>0)\ |A|<\varepsilon$ を満たすならば $A=0$」。
- $a_n\to a$ のとき、a を $\{a_n\}$ の極限と呼び、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ とも表す。
- 収束列の定義。
- 定数列は収束する。$a_n=c\ (n\in\mathbb{N})$ ならば $a_n\to c$.
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ の証明(アルキメデスの公理を用いる). 任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して、$\displaystyle\frac{1}{n^k}\le\frac{1}{n}$ であることから、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$ もすぐ証明出来る。
- 「有界」集合の定義。
- 「有界 $\Leftrightarrow$ 上に有界かつ下に有界」の証明。$|x|\le R$ ならば $-R\le x\le R$. $L\le x\le U$ ならば $|x|\le\max\{|L|,|U|\}$.
- 数列が上に有界、下に有界、有界の定義。それぞれ、写像としての値域が上に有界、下に有界、有界ということ。
- 「収束列は有界である。」

[1] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi3.pdf
[2] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi3.pdf

- $\{a_n\}$ が a に、$\{b_n\}$ が b に収束するならば、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b,\quad \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b,\quad \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=ab.$$

  $b\neq 0$, $(\forall n\in\mathbb{N})\ b_n\neq 0$ ならば、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}.$$

- 和について証明した。差はほぼ同様に証明出来る。積については次回。