

数学解析 第1回メモ

桂田 祐史

2017年4月10日, 2017年5月7日

宿題問¹を出しました。

- 出欠カードを100枚, Macを持って行く。
- 数理リテラシーの量称記号についての宿題を作る。
- 自己紹介。桂田。910号室。質問に来る時は、メールで予約すると良い: katurada あつとマーク meiji.ac.jp, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/>
- WWWサイトには、講義ノートや宿題などが載せてある。
- (講義内容以外の) 私語禁止。質問&板書ミスの指摘は歓迎する。
- 「解析」とは、極限(の論法)を(扱う | 用いる)数学である。
- この「数学解析」では微積分に現れる極限を扱う。
数学科では、微積分の講義の中に、この「数学解析」の内容を含めてある。逆に言うと、数学科の微積分の講義から、極限に関する議論を抜き出したのが、この科目である。
- やる前は敬遠されるかと思っていたが、面白いと言ってくれる学生がいる。理解出来るようになって面白く感じられるようになりますように。
- 他の科目との関係: 「数理リテラシー」→「数学の方法」→「数学解析」≡「トポロジー」
秋学期の「複素関数・同演習」は「数学解析」の内容を良く使う。
- フーリエ解析(講義としては、「数学とメディア」、「画像処理とフーリエ変換」)は、無限次元空間における極限が出て来るので、「関数解析」が必要になる。関数解析については、大学院の講義があるが、4年生は先取り履修が出来る。
- (これは言いそびれた) 幾何、代数、解析のうち、解析で「数学解析」の内容が必要になるのは当然だけれど、幾何でも必要になる。
(次は言った) 幾何の基礎科目である「トポロジー」は「数学解析」とかぶる部分が多い。
- 講義ノートの§10くらいまで(100ページ弱)の内容を消化する予定(§11, §12までは説明できないだろう)。
- この科目には、計算問題はほとんどない。計算問題を解くことで理解できるという科目ではない。
- 講義ノートには、練習用の「問」がある。その多くには解答もつけてある。自習に活用して欲しい。

¹<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi1.pdf>

- 宿題は2回に1つくらい出す (昨年度は全部で8問出した)。何を参考にしても、誰に相談しても良いが、最後は自分で書いて出すこと。人が書いたものを写すのではやる意味がない (コピーと判断した時点で添削をやめます)。演習代わりであり、添削したものを学生が復習することに意味があると考えている。

論理と集合の復習

量称記号 \forall, \exists の読み方 (日本語への直し方)

「 $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 0$ 」とか。

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ について。

(これはイマイチはっきり言わなかった) 命題を論理式で表すことの利点

- 記号を使わないと困るような (書きにくい、書いても分かりにくい or 曖昧になったりする) 長い複雑な命題がある。
- 否定命題が機械的に作れる。

§1 に入る

\mathbb{R} の性質。(1) 可換体, (2) 順序体, (3) 連続性

- \mathbb{N} は環でない。
- \mathbb{Z} は可換環であるが体ではない。
- \mathbb{Q} は (1), (2) を満たすが、(3) は満たさない。
- \mathbb{C} は (1), (3) を満たすが、(2) は満たさない。

極限の議論をするには、(3) 連続性 が重要である。

連続性の表し方には色々ある。例えば次の3つ:

- Weierstrass の上限公理
- Dedekind の公理 (「切断の存在」)
- アルキメデスの公理と完備性

この講義では (a) を採用する。

Weierstrass の上限公理を書いて、言葉の説明が必要と言い、「上界」、「上に有界」という言葉の定義を書く。

$A = [1, 2)$ とする。 $U = 2$ とすると、 U は A の上界である。また A は上に有界である。

上界は (存在するときは) たくさんある。2 以外に、3 や 3.5 も A の上界である。図を書く。

「上限」とは、最小の上界である。つまり、上界であって、それより小さいものは上界ではない。

2 は $[1, 2)$ の上限である (証明は次回)。

「最大値は上限である」しかし逆は真でない (必ずしも成り立たない)。

$A = [1, 2)$ において、2 は A の上限であるが、 A の最大値ではない。 A の最大値は存在しない。

§1.3 の途中まで。

3分ほど時間をオーバーしてしまった。