数学解析宿題解答

桂田 祐史

2016 年 7 月 11 日, 7 月 15 日訂正

問 1　(1) $A \subset \mathbb{R}$ とする。次の論理式を日本語で ($\forall$, $\exists$ という記号は使わずに) 表わせ。

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad |x| \le R.$$

($|x| \le R$ はそのままで良い[1]。)
(2) 次の日本語の文で表された各命題を (a) 論理式で書き直し、(b) 証明せよ。

(i) 任意の実数 x に対して、x より大きい実数 y が存在する。

(ii) ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、$y^2 > x$ が成り立つ。

問 2　$A = (1, 2]$ とするとき、以下の問に答えよ。(1) A の上限を求めよ。上限である根拠も書くこと。(2) A の下限を求めよ。下限である根拠も書くこと。

問 2′　(この問はおまけである) 次にあげる $\mathbb{R}$ の部分集合 A_j $(j = 1, 2, \ldots, 10)$ に対して、$\sup A_j$, $\inf A_j$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
&A_1 := (0, 1], \quad A_2 := \mathbb{N}, \quad A_3 := \mathbb{R}, \quad A_4 := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad A_5 := \left\{ n^2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \\
&A_6 := \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad A_7 := \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^2 < 2 \right\}, \quad A_8 := \left\{ \sin \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \\
&A_9 := (0, 1) \cup (2, 3), \quad A_{10} := \left\{ \tan^{-1} x \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

(ただし $\tan^{-1}$ は主値を表すとする。また、$(0, 1]$, $(0, 1)$, $(2, 3)$ は $\mathbb{R}$ の区間である。)

問 3　$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を実数列とするとき、次の (1), (2) に答えよ。

(1) $a \in \mathbb{R}$ とする。

(a) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が a に収束するという条件を論理式で表わせ。
(b) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が a に収束しないという条件を論理式で表わせ。

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が収束列でないという条件を論理式で表わせ。

(いずれも否定の記号 $\neg$ を用いずに書くこと。)

問 4　次の各場合に $(\forall a \in \mathbb{R})$ $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ であることを、極限の定義に従って示せ。
(1) $f(x) = 2x + 3$ $(x \in \mathbb{R})$　(2) p と q は実数で、$f(x) = px + q$ $(x \in \mathbb{R})$

問 5　次の各関数が $\mathbb{R}^2$ で連続であることを示せ (理由を述べよ)。
(1) $f(x, y) = x^2 + \sqrt{2}xy + (\log 3)y^2 + \frac{\pi}{4}x + e^5 y + 6$　(2) $g(x, y) = \exp(3x + 2y + 1)$

(3) $h(x, y) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + y^2 + 1}$　(4) $\varphi(x, y) = \log\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$　(5) $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2 y - y^3 \end{pmatrix}$

[1] $\forall$ と $\exists$ が読めることを確認する問題なので。

問 6　次の極限が存在するかどうか調べ、存在する場合はそれを求めよ。発散する場合も ∞ または $-\infty$ であるときはそれを指摘せよ。簡単で良いので根拠を書くこと。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}(2x^2+3xy+4y^2)$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{6x+7}{3x^2+4xy+5y^2}$　(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+2xy+3y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|x|}y^2}{x^2+y^2}$　(7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$

(8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}$　(9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x+y}$　(10) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)}{x+y}$.

問 7　次の 2 つの関数は、Weierstrass の最大値定理の仮定を満たさず、最大値が存在しない。6 月 20 日の授業で説明した証明のどこが成り立たないかを指摘せよ (定理の仮定のどれが成り立たないかではない)。

(1) $K=[0,1]$, $f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1)\end{cases}$　(2) $K=[0,\infty)$, $f(x)=\tan^{-1}x$ $(x\in K)$

(ただし $\tan^{-1}$ は tan の逆関数の主値を表すものとする。)

問 8　$\mathbb{R}^2$ における次の各集合について、(a) 図示できる場合は図示せよ, (b) 開集合であるかどうか答えよ。開集合である場合は証明せよ, (c) 閉集合であるかどうか答えよ。閉集合である場合は証明せよ, (d) (努力目標) 開集合でない場合、閉集合でない場合は、そのことを証明せよ。

(1) $\emptyset$　(2) $\mathbb{R}^2$　(3) $\{(1,2)\}$　(4) $\{(3,4),(5,6)\}$　(5) $(7,8)\times(9,10)$　(6) $[7,8]\times(9,10)$

(7) $[7,8]\times[9,10]$　(8) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 7<x^2+y^2<8\}$　(9) $(0,\infty)\times(0,\infty)$

(10) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1\}$　(11) $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,2)\}$.

((5), (6), (9) で (a,b) は開区間を表す。その他で (a,b) は $\mathbb{R}^2$ の点を表す。紛らわしくて申し訳ない。フランス流に開区間を $]a,b[$ で表すのが良いかもしれない。)

問 1 解答

(1) ある実数 R が存在して、A の任意の要素 x に対して $|x| \le R$ が成り立つ。

(2) (i) (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ y > x.$

(b) x を任意の実数とする。$y := x+1$ とおくと、y は実数であり、$x+1 > x$ であるから、$y > x$ が成り立つ。

(ii) (a) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ y^2 > x.$

(b) $x := -1$ とおくと、x は実数であり、任意の実数 y に対して、 $y^2 \ge 0 > -1$ であるから $y^2 > x$ が成り立つ。

問 2 の解答　($A = (1, 2]$ であるから、$x \in A \Leftrightarrow 1 < x \le 2$ である。)

(1) 2 は A の最大値である (これくらいは明らかでも構わないが、一応根拠を書いておくと、(a) A の任意の元 x に対して、$x \le 2$ が成り立つ　(b) $2 \in A$)。

「最大値は上限である」という定理によって、2 は A の上限である。

(2) A の下限は 1 である。実際、

(i) A の任意の要素 x に対して、$1 < x \le 2$ が成り立つ。ゆえに $1 \le x.$

(ii) 任意の正の数 ε に対して、

- $\varepsilon > 1$ ならば $x := 2$ とおくと、$x \in A$ かつ $x < 1 + \varepsilon.$
- $\varepsilon \le 1$ ならば、$x := 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}$ とおくと、$1 < x \le 2$ であるから $x \in A.$ かつ $x < 1 + \varepsilon.$

いずれにしても $(\exists x \in A)\ x < 1 + \varepsilon$ が成り立つ。 ■

((2)(ii) は、$x := \min\{1 + \varepsilon/2, 2\}$ とおいても良い。本質的には同じことであるが。)

元々の問 2′ の答　$\sup A_1 = 1$, $\inf A_1 = 0$, $\sup A_2 = \infty$, $\inf A_2 = 1$, $\sup A_3 = \infty$, $\inf A_3 = -\infty$, $\sup A_4 = 1$, $\inf A_4 = 0$, $\sup A_5 = \infty$, $\inf A_5 = 1$, $\sup A_6 = \dfrac{1}{2}$, $\inf A_6 = -1$, $\sup A_7 = \sqrt{2}$, $\inf A_7 = -\sqrt{2}$, $\sup A_8 = \sin 1$, $\inf A_8 = 0$, $\sup A_9 = 3$, $\inf A_9 = 0$, $\sup A_{10} = \dfrac{\pi}{2}$, $\inf A_{10} = -\dfrac{\pi}{2}$. ■

(おまけ) $\sup A_9 = 3$ の証明　$A_9 = (0, 1) \cup (2, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \lor 2 < x < 3\}$ である。

(i) $x \in A_9$ とすると、$0 < x < 1 \lor 2 < x < 3$. 前者なら $x < 1 < 3$ より $x \le 3$. 後者の場合も $x \le 3$. ゆえに

$$(\forall x \in A_9) \quad x \le 3$$

が成り立つ。

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

- $\varepsilon < 1$ ならば $x := \frac{3+(3-\varepsilon)}{2} = 3 - \frac{\varepsilon}{2}$ とおくと、$\dfrac{5}{2} < x < 3$ であるから、$x \in A_9$. 一方 $3 - \varepsilon < x$.
- $\varepsilon \ge 1$ ならば $3 - \varepsilon \le 2$ であるから、$x = \dfrac{5}{2}$ とおくと、$x \in A_9$ かつ $3 - \varepsilon < x$.

ゆえに $(\exists x \in A_9) \quad 3 - \varepsilon < x$ が成り立つ。

(i), (ii) より $\sup A_9 = 3$. ■

問 3 解答

(1) (a) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon n \ge N)\ |a_n - a| < \varepsilon$

(b) $(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon n \ge N)\ |a_n - a| \ge \varepsilon$

(2) $(\forall a \in \mathbb{R})\ (\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon n \ge N)\ |a_n - a| \ge \varepsilon$

問 4 の解答

(1) a を任意の実数、ε を任意の正数とする。$\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ である。また $|x-a| < \delta$ を満たす任意の実数 x に対して、

$$|f(x) - f(a)| = |2x + 3 - (2a+3)| = |2(x-a)| = 2\,|x-a| < 2\delta = \varepsilon.$$

ゆえに $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. すなわち $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(2) a を任意の実数、ε を任意の正数とする。$\delta := \frac{\varepsilon}{|p|+1}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ である。また $|x-a| < \delta$ を満たす任意の実数 x に対して、

$$|f(x) - f(a)| = |px + q - (pa+q)| = |p(x-a)| = |p|\,|x-a| < \frac{|p|}{|p|+1}\varepsilon < 1\cdot\varepsilon = \varepsilon.$$

ただし 0 以上の数 c に対して $\frac{c}{c+1} < 1$ であることを用いた (c が正であれば、$\frac{c}{c+1} < \frac{c}{c} = 1$. $c = 0$ であれば、$\frac{c}{c+1} = \frac{0}{1} = 0$)。ゆえに $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. すなわち $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. ■

((2) は p で場合分けしても良い。$p \neq 0$ ならば、$\delta := \frac{\varepsilon}{|p|}$ として、$p = 0$ ならば $\delta := 1$. 他にも色々あるはず。)

問 5 解説　これ以外の解答の仕方がない、というわけではない。

前提:　高校で学んだ sin, cos, e^x, $\sqrt{x}$, $\log x$, x^α などが定義域で連続で、定義域の内部で無限回微分可能というのは、認めることにする (この授業でそこまで手がまわらないので)。

(1) $1, \sqrt{2}, \log 3, \pi/4, e^5, 6 \in \mathbb{R}$ であるので $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ である。ゆえに $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は多項式関数であり、連続である。

(2) $F(x,y) := 3x+2y+1$, $G(z) := \exp z$ とおく。$F(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ であるから、$F\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbb{R}$ は多項式関数であり、$\mathbb{R}^2$ 全体で連続である。また $G\colon \mathbb{R} \ni z \mapsto G(z) = \exp z \in \mathbb{R}$ は連続である (こういう高校で習った関数についての連続性は認めることにする)。ゆえにそれらの合成である $g = G\circ F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。

(3) $Q(x,y) := x^2 + 2x + 3$, $P(x,y) := x^2 + y^2 + 1$ とおくと、$P(x,y), Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ である。ゆえに $h(x,y) = \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ は x, y の有理式であり、h は有理関数である。また $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $P(x,y) \geq 1$ であるから、$P(x,y) \neq 0$. ゆえに $h = \dfrac{Q}{P}$ の定義域は $\mathbb{R}^2$ であり、$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。

注意：　$Q(x) := x^2 + 2x + 3$ として、1 変数多項式とするのではない。

(4) $f(x,y) := x^2+y^2$ とおくと、$f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ であるから、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。一方 $f(\mathbb{R}^2) = [0,\infty)$ である。$g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $g(z) := \sqrt{z}$ で定めると、g は連続である。ゆえに合成関数 $g\circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。また $h\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ は定数関数だから連続である。ゆえに $F = h + g\circ f\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto 1 + \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$ は連続である。そして $F(\mathbb{R}^2) = [1,\infty)$. 対数関数 $G\colon (0,\infty) \ni z \mapsto \log z \in \mathbb{R}$ は連続である。$F(\mathbb{R}^2) \subset (0,\infty)$ であるから、G と F は合成可能で、$\varphi = G\circ F\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \log(1+\sqrt{x^2+y^2}) \in \mathbb{R}$ は連続である

はしょって、$g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $g(z) := 1 + \sqrt{z}$ で定義して、$g([0,\infty)) = [1,\infty)$ として、$g\circ f(\mathbb{R}^2) = [1,\infty)$ で、これが G の定義域に含まれる、としても良いかも。

(5) $F_1(x,y) := x^3 - 3xy^2 \in \mathbb{R}$, $F_2(x,y) := 3x^2y - y^3 \in \mathbb{R}$ とおくと、$F_1(x,y), F_2(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ であるから、関数 $F_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と $F_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。ゆえに $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は連続である。■

問 6 解説

(1) $f(x,y) := 2x^2+3xy+4y^2$ は多項式であるから、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。特に $(0,1)$ で連続であるから、$(x,y)\to(0,1)$ のときの極限は、$f(0,1)$ に等しい:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = f(0,1) = 2\cdot 0^2 + 3\cdot 0\cdot 1 + 4\cdot 1^2 = 0+0+4 = 4.$$

(2) $f(x,y) := \dfrac{6x+7}{3x^2+4xy+5y^2}$ は x, y の有理式である。分母については、$3x^2+4xy+5y^2 = 3\left(x+\frac{2y}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}y^2$ であるから、分母が 0 になるのは、$(x,y)=(0,0)$ のときのみ。ゆえに分母が 0 にならない範囲 $\Omega := \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ に対して、$f\colon \Omega\to\mathbb{R}$ が定義されて連続である。特に $(1,2)\in\Omega$ で連続であるから、$(x,y)\to(1,2)$ のときの極限は、$f(1,2)$ に等しい:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = \frac{6\cdot 1+7}{3\cdot 1^2+4\cdot 1\cdot 2+5\cdot 2^2} = \frac{13}{3+8+20} = \frac{13}{31}.$$

(3) (やはり有理関数であるが、$(0,0)$ は定義域に入っていない。極限が存在しないことだけならば、背理法で証明できる。) もし極限が存在すると仮定すると、それを A とおくと

$$\begin{aligned}1 &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{x^2+2xy+3y^2}\cdot(x^2+2xy+3y^2)\right)\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+2xy+3y^2}\cdot\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+2xy+3y^2) = A\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

となり矛盾が導かれる。ゆえに極限は存在しない。■

実は $\lim = \infty$ となることを示そう。一般に「つねに $f(\boldsymbol{x})>0$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0$ ならば $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\dfrac{1}{f(\boldsymbol{x})} = \infty$」という定理が成り立つ。

$\widetilde{f}(x,y) := x^2+2xy+3y^2$ とおくと、これは x, y の多項式であるから、$\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は連続であり、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\widetilde{f}(x,y) = \widetilde{f}(0,0) = 0$. $\widetilde{f}$ の $\Omega := \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ への制限を f とすると (連続関数の制限は連続なので) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, また $(\forall (x,y)\in\Omega)$ $f(x,y) = (x+y)^2+2y^2 > 0$. ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+2xy+3y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{f(x,y)} = \infty.$$

(4) 分母と分子それぞれが 0 に収束する、いわゆる不定形である。$y=kx$ 作戦を使ってみる。

(ここから解答) k を実数の定数として、$y=kx$ に沿った極限を調べる。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-(kx)^2}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

これは k に依存するので ($k=0$ ならば 1, $k=1$ ならば 0)、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在しない。(念のため: もしある $A\in\mathbb{R}$ が存在して $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = A$ ならば、k が何であっても $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = A$ となるはずで、矛盾する。)

(5) k を実数の定数として、$y=kx$ に沿った極限を調べる。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{\sqrt{x^2+(kx)^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{k|x|}{\sqrt{1+k^2}} = 0.$$

これから収束するならば極限は 0 である。これは $y=kx$ としなくても、分かるかもしれない。その場合はスキップして最初から次のことをしても良い。

0 に収束しそうなので、0 との距離を調べる。

$$|f(x,y)-0| = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0)).$$

(最後の収束のところは、「$\sqrt{x^2+y^2}$ は連続関数だから $\sqrt{0^2+0^2}=0$ に収束する」と言っても良いし、ε-δ 論法の場合は、δ を $\delta=\varepsilon$ で定めれば証明できる。) ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

(別解) 途中で極座標 $x=r\cos\theta$, $r=\sin\theta$ を用いると、

$$0 \le |f(x,y)-0| = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2\sin^2\theta}{\sqrt{r^2}} = r\sin^2\theta \le r.$$

$(x,y)\to(0,0)$ のとき $r\to 0$ であるから、$f(x,y)\to 0$.

(6) 前問とほぼ同じストーリーで 0 に収束する。

$$\left|\frac{\sqrt{|x|}y^2}{x^2+y^2}-0\right| = \frac{\sqrt{|x|}y^2}{x^2+y^2} \le \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |x| \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0)).$$

(最後の収束のところは、$(x,y)\mapsto|x|$ が連続関数だから。)

(7) (4) とほぼ同じ。$y=kx$ に沿った極限は $\dfrac{1-k}{1+k}$ で、これは k に依存するので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$ は存在しない (発散)。

(8) k を実数の定数として、$y=kx$ に沿った極限を調べる。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x+kx} = \lim_{x\to 0} x\frac{k}{1+k} = 0\cdot\frac{k}{1+k} = 0.$$

これから、もしも極限が存在するならば、それは 0 である。$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ($r>0$, $\theta\in[0,2\pi)$) とおくと、

$$xy = r\cos\theta\cdot r\sin\theta = \frac{r^2\sin 2\theta}{2}, \quad x+y = r\cos\theta + r\sin\theta = \sqrt{2}r\sin(\theta+\pi/4)$$

であるから、$\theta\ne 3\pi/4, 7\pi/4$ であるとき、

$$\left|\frac{xy}{x+y}-0\right| = \left|\frac{r^2\sin 2\theta}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}r\sin(\theta+\pi/4)}\right| = \frac{r}{2\sqrt{2}}\left|\frac{\sin 2\theta}{\sin(\theta+\pi/4)}\right|.$$

$r>0$ がどんなに小さくても、θ を十分 $3\pi/4$ に近く取れば、$\left|\dfrac{\sin(\theta+\pi/4)}{\sin 2\theta}\right| < \dfrac{r}{2\sqrt{2}}$ と出来て、$\dfrac{r}{2\sqrt{2}}\left|\dfrac{\sin 2\theta}{\sin(\theta+\pi/4)}\right| > 1$. ゆえに $\dfrac{xy}{x+y}$ は 0 には収束しない。従って、極限は存在しない。

(9) これも (8) とほぼ同様で、極限なし。

(10) これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。

$A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\ne 0\}$, $B:=\{z\in\mathbb{R}\mid z\ne 0\}$ とおいて、$f\colon A\to\mathbb{R}$, $g\colon B\to\mathbb{R}$ を $f(x,y):=x+y$, $g(z):=\dfrac{\sin z}{z}$ で定義する。$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0+0=0$ (多項式関数は連続だから $(x,y)=(0,0)$ での値に収束) より、多項式関数 $x+y$ の A への制限である f についても、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ が成り立つ。$\displaystyle\lim_{z\to 0} g(z)=1$ は高校で学んだ。$f(A)\subset B$ であるから、g と f は合成できて、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y)) = \lim_{z\to 0} g(z) = 1.\blacksquare$$

問 7 解説

(1) $f(K)=[0,1)$ であり、$\sup f(K)=1$ である。$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup f(x_n)$ となる K 内の数列として、$x_n = 1-\frac{1}{n}$ が取れる。実際、$0 \le x_n < 1$ であるから、$x_n \in K$ $(n\in\mathbb{N})$, $f(x_n)=x_n=1-\frac{1}{n}=1$ $(n\to\infty)$. $\{x_n\}$ は部分列を取らなくても収束する: $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. つまり、定理の証明中の記号で $c=1$. しかし f は c で連続でないので、

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad (=1=\sup f(K))$$

が導かれない。

手短に言うと、「f が $c=1$ で連続でないので、$f(c)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ が導かれない。」

(2) $f(K)=[0,\pi/2)$ であり、$\sup f(K) = \dfrac{\pi}{2}$. $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup f(x_n)$ となる K 内の数列として、$x_n = n$ $(n\in\mathbb{N})$ が取れる。実際、$0 \le x_n$ であるから $x_n \in K$, $f(x_n)=\tan^{-1} n \to \dfrac{\pi}{2}$ $(n\to\infty)$. ところが $\{x_n\}$ は有界でないので、どんな部分列も収束しない ($\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ を $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列とするとき、$x_{n_k}=n_k \ge k$ であるから、$x_{n_k}\to\infty$ $(k\to\infty)$)。

手短に言うと、「K が有界でないので、$\{x_n\}$ が収束部分列を持たない (言い換えると、任意の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対して、$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ が存在しない)。」 ■

問 8 解説

必要事項の復習　(5)〜(7), (9) に現れる $\times$ は直積集合を表す記号である。A と B を集合とするとき、

$$A\times B := \{(x,y) \mid x\in A \wedge y\in B\}$$

を A と B の直積集合と呼ぶのであった。例えば $(1,2)\times(3,4) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<x<2 \wedge 3<y<4\right\}$.
授業で解説した次の命題を用いる。

命題 0.1 (1) $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。(2) 集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の各集合 U_λ が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。(3) U_1 と U_2 が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば、$U_1\cap U_2$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

命題 0.2 (1) $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。(2) 集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の各集合 F_λ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合ならば、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。(3) F_1 と F_2 が $\mathbb{R}^n$ の閉集合ならば、$F_1\cup F_2$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

命題 0.3 $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ が連続, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ のとき、次の (1),(2) が成立する。

(1) $U_1=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)>\alpha\}$, $U_2=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)<\beta\}$, $U_3=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \alpha<f(x)<\beta\}$, $U_4=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\ne\gamma\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(2) $F_1=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\ge\alpha\}$, $F_2=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\le\beta\}$, $F_3=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \alpha\le f(x)\le\beta\}$, $F_4=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)=\gamma\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

略解　図を描くのは省略。

(1) $\emptyset$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり、$\mathbb{R}^2$ の閉集合でもある。これは授業で証明済みである (**命題 0.1** (1), **0.2**(1))。

(2) $\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であり、$\mathbb{R}^2$ の閉集合でもある。これは授業で証明済みである (**命題 0.1** (1), **0.2**(1))。

(3) $\{(1,2)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。

$\{(1,2)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。一般に $\forall a \in \mathbb{R}^n$ に対して、$A = \{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。実際、$f\colon \mathbb{R}^n \ni x \mapsto |x-a|^2 = \sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)^2 \in \mathbb{R}$ は、多項式関数であるから、$\mathbb{R}^n$ 上の連続関数で、$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ は **命題 0.3** (2) により、$\mathbb{R}^n$ の閉集合である。(別証) あるいは、

$$A = \bigcap_{j=1}^{n} F_j, \quad F_j := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = a_j\}$$

と書き直して、各 F_j が**命題 0.3** (2) により $\mathbb{R}^n$ の閉集合であること、それと **命題 0.1** (2) を使う。

(4) $\{(3,4),(5,6)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。

(3) の解答中に説明したことから、1 点からなる集合 $A_1 = \{(3,4)\}$, $A_2 = \{(5,6)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。**命題 0.1** (3) を使えば、$\{(3,4),(5,6)\} = A_1 \cup A_2$ も $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(5) $A = (7,8) \times (9,10)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。実際、$f(x,y) = x$, $g(x,y) = y$, 配布したプリントには、ここに消し忘れのゴミが入っていました。$U_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7 < f(x,y) < 8\}$, $U_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 < g(x,y) < 10\}$ とおくと、f と g は多項式関数であるから $\mathbb{R}^2$ で連続であり、$A := U_1 \cap U_2$. **命題 0.3** (1) を使えば、U_1 と U_2 が $\mathbb{R}^2$ の開集合であることが分かり、**命題 0.1** (3) を使えば A が $\mathbb{R}^2$ の開集合であることが分かる。

A は $\mathbb{R}^2$ の閉集合ではない。

(6) $[7,8] \times (9,10)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合でもないし、$\mathbb{R}^2$ の閉集合でもない。

(7) $A = [7,8] \times [9,10]$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。

A は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。実際 $f(x,y) = x$, $g(x,y) = y$, $F_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7 \le f(x,y) \le 8\}$, $F_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 \le g(x,y) \le 10\}$ とおくと、f と g は多項式関数であるから $\mathbb{R}^2$ で連続であり、$A = F_1 \cap F_2$ で、**命題 0.3** (2) を使えば、F_1 と F_2 が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることが示せるので、**命題 0.2** (2) を使えば、A が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることが分かる。

(8) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7 < x^2 + y^2 < 8\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。$f(x,y) := x^2 + y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, $a = 7$, $b = 8$ とおくと、$f(x,y)$ は x, y の多項式で、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続関数であり、$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < f(x,y) < b\}$ と書けるので、**命題 0.3** (1) を使えば 、A が $\mathbb{R}^2$ の開集合であることが分かる。

A は $\mathbb{R}^2$ の閉集合ではない。

(9) $A = (0,\infty) \times (0,\infty)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。$f(x,y) = x$, $g(x,y) = y$, $U_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\}$, $U_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) > 0\}$ とおくと、f と g は多項式関数であるから $\mathbb{R}^2$ で連続であり、U_1 と U_2 は **命題 0.3** (1) より $\mathbb{R}^2$ の開集合である。そして $A = U_1 \cap U_2$ であるから、**命題 0.1** (3) より A は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

$A = (0,\infty) \times (0,\infty)$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合ではない。

(10) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1\}$ は、$\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。

A は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。$f(x,y) := \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$, $a := 7$, $b := 8$ とおくと、$f(x,y)$ は x, y の多項式であるから、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続関数であり、$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le f(x,y) \le b\right\}$. **命題 0.3** (2) より $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(11) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。実際、$f\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto (x-1)^2 + (y-2)^2 \in \mathbb{R}$ は多項式関数であるから $\mathbb{R}^2$ 上連続であり、$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\}$ であるから、**命題 0.3** (1) より A は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

A は $\mathbb{R}^2$ の閉集合ではない。■