前回プリントの訂正と補足

桂田 祐史

2016 年 7 月 18 日

前回欠席した人や、宿題 8 を返却して欲しい人は、研究室 (910) まで取りに来て下さい。今日は突発的な用事の入らない限り 2〜4 限空いています。水曜も 5 限以外は空いています。

訂正

- p. 6, 上から 6 行目。
  $\dfrac{r^2\sin^2\theta|}{\sqrt{r^2}} \quad\to\quad \dfrac{r^2\sin^2\theta}{\sqrt{r^2}}$
- p. 7, 上から 9 行目。
  $f(K)=[0,\pi/2]$ であり、$f(K)=\dfrac{\pi}{2}.\quad\to\quad f(K)=[0,\pi/2]$ であり、$\sup f(K)=\dfrac{\pi}{2}.$
- p. 7, 上から 10 行目。
  $\tan^{-1}n=\frac{\pi}{2}=1\ (n\to\infty)\quad\to\quad \tan^{-1}n\to\frac{\pi}{2}\ (n\to\infty)$

WWW の PDF (http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi-all.pdf) は直しておいたので、そちらを見てもらっても良い。今後も発見次第直します。

問 8 について補足

誰か作った間違った答案を写したようなものが散見された。何を参考にしても良いが、理解してから自分の表現で書くように言ってある。間違った答案だけれど、理解できたのだろうか。

この講義では、与えられた集合を連続関数を使って表現して、開集合や閉集合であることを示す方法 (講義ノートの命題 8.4, 8.5, 8.7, 8.10 を使う) を説明した。この方法が使えない場合もあるが、微積分に登場する多くの集合について適用できて、短く厳密な証明が出来る。

それを使わずに証明しようとした人がいたけれど、失敗している場合が多かった (例えば開集合の証明で ε を具体的に示さなかったり、$B(a;\varepsilon)\subset\Omega$ の証明をサボったりしてあった。変わったところでは、集合の境界を求めて議論している人もいたが、集合の境界がどうなるかをきちんと証明していなかったので[1]、証明とは認められない。)。そういう答案を添削しようとしたけれど、途中で止めることにした (そこまで付き合う時間的余裕がない)。

前回のプリントに書かなかったことを説明しておく。

- Ω が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、($B(a;r)$ を $\mathbb{R}^n$ における中心 a, 半径 r の開球として)

  $$(\forall x\in\Omega)(\exists\varepsilon>0)\quad B(x;\varepsilon)\subset\Omega$$

  が成り立つことを言うが、この条件は

  $$\forall x\,(x\in\Omega\Rightarrow((\exists\varepsilon>0)\quad B(x;\varepsilon)\subset\Omega))$$

  とも書ける[2]。(空集合が開集合であることを示すには、この後者の方が考えやすい。)

[1]境界がどうなるかを議論無しで認めるくらい緩く考えるならば、開集合であることの証明など不必要だろう。

[2]$(\forall x\colon P(x))\ Q(x)$ は、$\forall x(P(x)\Rightarrow Q(x))$ の短縮形である。なお、$(\exists x\colon P(x))\ Q(x)$ は、$\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ の短縮形である。

- $\emptyset$ や $\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることは、開集合について学ぶ場合、必ず定理として紹介されるので、通常は常識として使って良い。しかし、試験で「証明せよ」と求められる可能性はある。証明しようとして失敗している人が多かったのでここに書いておく。(この宿題の (1),(2) の答とするには、n は 2 とする必要がある。)

  [$\emptyset$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であること] 空集合は要素を一つも持たないので、任意の x に対して $x \in \emptyset$ は偽である。ゆえに $x \in \emptyset \Rightarrow ((\exists \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \subset \emptyset)$ は真である。ゆえに $\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

  [$\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であること] 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、$\varepsilon = 1$ とおくと、$\varepsilon > 0$ かつ $B(x; \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ が成り立つ。ゆえに $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

- $\emptyset$ や $\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることも同様 (常識だが証明を求められるかも) である。

  [$\emptyset$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であること] $\emptyset^c = \mathbb{R}^n$ であり、$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

  [$\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であること] $(\mathbb{R}^n)^c = \emptyset$ であり、$\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

- この講義では「有界閉集合」が現れる定理が多く、それを使うためには、<u>閉集合である</u>ことを証明出来ることが特に重要となる。そのため、閉集合<u>でない</u>ことの証明、開集合<u>でない</u>ことの証明については、講義であまり時間を割かず、前回プリントでも省略した。しかし、宿題の中でその部分を頑張ってくれた人がかなりいたので、説明を補足しておく。

  - Ω が $\mathbb{R}^n$ の開集合ではないことを定義に基づいて示すには、

    $$(\exists a \in \Omega)(\forall \varepsilon > 0) B(a; \varepsilon) \not\subset \Omega$$

    を証明することになる。これは条件の否定を作るだけなのだが、この時点で迷走を始める人が少なくなかった。a については、存在することを示すので、1 つで十分なのに、複数存在することを示そうとしたり、ε については、「任意の正数 ε」であるのに、「任意の」が不明瞭であったり。

    a の存在については、具体的に示すのが簡単。a は、Ω の要素のうち、Ω の境界にあるものを取れば良い (境界にあることを証明する必要はなく、直観的イメージで選べば良い)。例えば、(3) では $a = (1, 2)$, (4) では $a = (3, 4)$, (6) と (7) では $(8, 9.5)$, (10) では $\left(\sqrt{2}, 0\right)$ 等。

    任意の正数 ε に対して、$B(a; \varepsilon) \not\subset \Omega$ を証明するわけだが、そのためには、$|a - b| < \varepsilon$ かつ $b \notin \Omega$ を満たす b の存在を示す。$|a - b| < \varepsilon$ については、a の座標の一方を $\varepsilon/2$ ずらしたものを b とすれば良い。もちろん $b \notin \Omega$ が成り立つようにずらす。(3) では $b = (1 + \varepsilon/2, 2)$, (4) では $b = (3 + \varepsilon/2, 4)$, (6) と (7) では $(8 + \varepsilon/2, 9.5)$, (10) では $(\sqrt{2} + \varepsilon/2, 0)$ とすれば良い。ほとんどワンパターンと言える。

  - Ω が $\mathbb{R}^n$ の閉集合ではないことを定義に基づいて示すには、$\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ が開集合でないことを言えば良い (これは上で説明したことに帰着されるので省略する)。

    あるいは「Ω が $\mathbb{R}^n$ の閉集合 $\Leftrightarrow$ Ω 内の任意の収束点列の極限が Ω に含まれる」という定理を使うことも出来る。つまり、Ω 内の点列で、収束するけれど、極限が Ω には含まれないものを一つ示せば、Ω は閉集合でないことの証明になる。

    (5), (6) では $\boldsymbol{x}_n = (7.5, 9 + \frac{1}{2n})$, (8) では $\boldsymbol{x}_n = \left(\sqrt{7} + \frac{1}{10n}, 0\right)$, (9) では $\boldsymbol{x}_n = (1/n, 1)$, (10) では $\boldsymbol{x}_n = (1 + 1/n, 2)$ とすれば良い。

なぜか $(7,8) \times (9,10) = (7,8) \cap (9,10)$ のような間違えた式を書いた人が複数いる。まさかとは思うけれど、「直積集合」と「積集合 (共通部分)」の名前が似ているから誤解した?それとも $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7 < x < 8\right\}$, $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 < y < 10\right\}$, のことを $(7,8)$, $(9,10)$ と書いているつもり？それは無理である (少し考えれば分かる)。 ($(7,8)$ は、区間という場合は、あくまで 1 次元の区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x < 8\}$ のことを指す。)