

# 数学解析 定義&定理確認

桂田 祐史

2014年7月14日, 21日

この講義では、定義(全部)や定理(大事なもの)を書けるようにしておこう、とすることにしています。出来るだけ、自分で書いてみて、解答を見てチェックして見て下さい。

例えば「数列の収束の定義を述べよ」という問に対して、

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) |a_n - a| < \varepsilon$$

とだけ書くのではなく、最低でも「 $\{a_n\}$ が $a$ に収束するとは」を書くべきで、完全にするためには「 $\{a_n\}$ を数列、 $a \in \mathbb{R}$ とする」のような説明も必要である。

## 良く使う記号

1. 次の記号の意味を説明せよ。

(1)  $\mathbb{N}$  (2)  $\mathbb{Z}$  (3)  $\mathbb{Q}$  (4)  $\mathbb{R}$  (5)  $\mathbb{C}$

2. 次の(1)~(9)は $\mathbb{R}$ の区間である。それらを $[\ ]$ ,  $(\ )$ を用いずに表せ。(10)は記号の使い方がおかしいが、その理由を記せ。

(1)  $[1, 2]$  (2)  $(1, 2)$  (3)  $[1, 2)$  (4)  $(1, 2]$  (5)  $(1, \infty)$  (6)  $[1, \infty)$  (7)  $(-\infty, 2]$  (8)  $(-\infty, 2)$  (9)  $(-\infty, \infty)$  (10)  $[1, \infty]$

**良く出て来る用語** □□の定義の述べ方。「○○は△△とする。○○が□□であるとは、～～が成り立つことをいう。」「○○は△△とする。～～が成り立つとき、○○は□□であるという。」のような言い回しを身につけること。

3. 次の用語の定義を述べよ。

(1) ( $\mathbb{R}$ の部分集合が) 上に有界 (2) ( $\mathbb{R}$ の部分集合が) 下に有界 (3) ( $\mathbb{R}$ の部分集合の) 上界 (4) ( $\mathbb{R}$ の部分集合の) 下界 (5) ( $\mathbb{R}$ の部分集合の) 上限 (6) ( $\mathbb{R}$ の部分集合の) 下限 (7) ( $\mathbb{R}$ の部分集合が) 有界 (8) ( $\mathbb{R}$ の部分集合の) 最大値 (9) ( $\mathbb{R}$ の部分集合の) 最小値

4. 次の用語の定義を述べよ。

(1) (数列が) 収束する (2) (数列が) 上に有界 (3) (数列が) 有界 (4) (数列が) 単調増加 (5) (数列が) 狭義単調増加 (6) (数列が) 無限大に発散する (7) (数列の) 部分列 (8)  $A \subset \mathbb{R}$  とするとき、 $A$ 内の数列

5. 次の用語の定義を述べよ。

(1) ( $\mathbb{R}^n$ の点列が) 収束する (2) ( $\mathbb{R}^n$ の点列が) 有界 (3) ( $\mathbb{R}^n$ の点列の) 部分列 (4)  $A \subset \mathbb{R}^n$  とするとき、 $A$ 内の点列

6. 次の用語・記号の定義を述べよ。

(1) (関数 $f$ が変数 $x$ をある値に近付けるときに) 収束する (2) (関数 $f$ が) 連続 (3) (変数 $x$ についての) 多項式 (4)  $\mathbb{R}[x]$  (5) (変数 $x$ についての) 有理式 (6) (関数 $f$ が変数 $x$ をある値に近付けるときに) 無限大に発散する (7) (関数 $f$ が変数 $x$ を $\infty$ に近付けるときに) 収束する (8) (関数 $f$ が変数 $x$ を $\infty$ に近付けるときに) 無限大に発散する

(多変数ベクトル値関数についても、ほぼ同様なので、もう繰り返さない。)

7. 次の用語の定義を述べよ。

(1) ( $\mathbb{R}^n$  の部分集合 $A$ が)  $\mathbb{R}^n$  の開集合 (2) ( $\mathbb{R}^n$  の部分集合 $A$ が)  $\mathbb{R}^n$  の閉集合 (3) ( $\mathbb{R}^n$  の部分集合 $A$ の) 閉包 (記号だけ覚えている人のため:  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  に対する  $\bar{\Omega}$  を  $\Omega$  の閉包という。)

## 大事な定理

8. 次の公理、定理を書け (言うまでもないことだが、いずれも命題である)。

- (1) Weierstrass の上限公理
- (2) 上に有界な単調増加数列の収束
- (3) アルキメデスの原理 (公理)
- (4) (Cantor の) 区間縮小法
- (5) Bolzano-Weierstrass の定理
- (6) Weierstrass の最大値定理
- (7) Rolle の定理
- (8) 平均値の定理

以上の8つの命題のうち、この講義で証明していないものはどれか。またこれらの命題の相互関係を述べよ (授業では芋づる式に証明したが、どういう順番でつながっているか)。

9. (1)  $\mathbb{R}^n$  の開集合について、「位相の公理」と呼ばれる定理を書け。(2)  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\}$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < f(x) < \beta\}$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \gamma\}$  が  $\mathbb{R}^n$  の開集合であるためには、 $f$  に何を仮定すれば良いか (答はただ一つに限らないが、授業で紹介した定理ではどうなっているか)。

10. 次の定理を書け。

- (1) 逆関数定理 (2) 陰関数定理 (3) Lagrange の未定乗数法

$\infty$ . 問 3~10 について、それぞれ例をあげよ。

1. (1)  $\mathbb{N}$  は自然数全体の集合 (2)  $\mathbb{Z}$  は整数全体の集合 (3)  $\mathbb{Q}$  は有理数全体の集合 (4)  $\mathbb{R}$  は実数全体の集合 (5)  $\mathbb{C}$  は複素数全体の集合

2. (1)  $[1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$  (2)  $(1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$  (3)  $[1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$   
(4)  $(1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$  (5)  $(1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x\}$  (6)  $[1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x\}$  (7)  $(-\infty, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$  (8)  $(-\infty, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$  (9)  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  (10) 実数と  $\infty$  は等しくならないから。

### 3.

(1)  $A \subset \mathbb{R}$  とする。  $A$  が上に有界であるとは、 $(\exists U \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) x \leq U$  が成り立つことをいう。

(2)  $A \subset \mathbb{R}$  とする。  $A$  が下に有界であるとは、 $(\exists L \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) L \leq x$  が成り立つことをいう。

(3)  $A \subset \mathbb{R}, U \in \mathbb{R}$  とする。  $U$  が  $A$  の上界であるとは、 $(\forall x \in A) x \leq U$  が成り立つことをいう。

(4)  $A \subset \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$  とする。  $L$  が  $A$  の下界であるとは、 $(\forall x \in A) L \leq x$  が成り立つことをいう。

(5)  $A \subset \mathbb{R}, S \in \mathbb{R}$  とする。  $S$  が  $A$  の上限であるとは、次の2条件が成り立つことをいう。

(a)  $S$  は  $A$  の上界 (b)  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) S - \varepsilon < x$

(別解「 $A$  の上界全体の集合の最小値を  $A$  の上限という。」もあるが、証明に使うときは上の書き方が便利。)

(6)  $A \subset \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$  とする。  $I$  が  $A$  の下限であるとは、次の2条件が成り立つことをいう。

(a)  $I$  は  $A$  の下界 (b)  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists x \in A) x < I + \varepsilon$

(別解「 $A$  の下界全体の集合の最大値を  $A$  の下限という。」もあるが、証明に使うときは上の書き方が便利。)

(7)  $A \subset \mathbb{R}$  とする。  $A$  が有界であるとは、 $(\exists R \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) |x| \leq R$  が成り立つことをいう。

(8)  $A \subset \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$  とする。  $M$  が  $A$  の最大値であるとは、 $M \in A$  かつ  $(\forall x \in A) x \leq M$  が成り立つことをいう。

(9)  $A \subset \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$  とする。  $m$  が  $A$  の最小値であるとは、 $m \in A$  かつ  $(\forall x \in A) m \leq x$  が成り立つことをいう。

4. 当たり前であるが、(1) が重要 (この講義の理解には必要不可欠)。

(1)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を数列、 $a \in \mathbb{R}$  とする。  $\{a_n\}$  が  $a$  に収束するとは、 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) |a_n - a| < \varepsilon$  が成り立つことをいう。このことを  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  と表す。

(2)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を数列とする。  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が上に有界とは、 $(\exists U \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq U$  が成り立つことをいう。

(注: 言い換えると集合  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  が  $\mathbb{R}$  の上に有界な部分集合である、ということである。)

(3)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を数列とする。  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が有界とは、 $(\exists R \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq R$  が成り立つことをいう。

(4)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を数列とする。  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が単調増加であるとは、 $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq a_{n+1}$  が成り立つことをいう。

(5)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を数列とする。  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が狭義単調増加であるとは、 $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n < a_{n+1}$  が成り立つことをいう。

- (6)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を数列とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $\infty$  に発散するとは、 $(\forall U \in \mathbb{R}) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) a_n \geq U$  が成り立つことをいう。このことを  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  と表す。
- (7)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を数列とする。 $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  の部分列であるとは、数列  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  で、 $(\forall k \in \mathbb{N}) n_k \in \mathbb{N} \wedge n_{k+1} > n_k$  を満たすものが存在して、 $(\forall k \in \mathbb{N}) b_k = a_{n_k}$  が成り立つことをいう。
- (8)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が数列、 $A \subset \mathbb{R}$  とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $A$  内の数列であるとは、 $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \in A$  が成り立つことをいう。

5. 数列とほとんど同じである (それを見せるために、あえて書いた)。

- (1)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を  $\mathbb{R}^n$  の点列、 $a \in \mathbb{R}^n$  とする。 $\{a_n\}$  が  $a$  に収束するとは、 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) |a_n - a| < \varepsilon$  が成り立つことをいう。このことを  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  と表す。
- (2)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を  $\mathbb{R}^n$  の点列とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が有界とは、 $(\exists R \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq R$  が成り立つことをいう。
- (3) 4. の (7) の中の「数列」を「点列」で置き換えれば良い。
- (4)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が点列、 $A \subset \mathbb{R}^n$  とする。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $A$  内の点列であるとは、 $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \in A$  が成り立つことをいう。

6. (1), (2) は非常に重要で、この講義の理解には必要不可欠。典型的な連続関数として、多項式関数、有理関数 (ただし分母が 0 でない、定義域の範囲で) は重要なので、きちんと認識できるため、(3), (4) はマスターしないとマズい。

- (1)  $\Omega \subset \mathbb{R}, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a \in \overline{\Omega}, A \in \mathbb{R}$  とする。 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が  $A$  に収束するとは、 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \Omega: |x - a| < \delta) |f(x) - A| < \varepsilon$  が成り立つことをいう。このことを  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  と表す。
- (2)  $\Omega \subset \mathbb{R}, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a \in \Omega$  とする。 $f$  が  $a$  で連続であるとは、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  が成り立つことをいう。
- (3) ある自然数  $n$  と  $n+1$  個の実数  $a_0, a_1, \dots, a_n$  を用いて、 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  と表せる  $x$  の式を  $x$  の (実係数) 多項式と呼ぶ。
- (4)  $x$  の実係数多項式全体の集合を  $\mathbb{R}[x]$  と表す。言い換えると、

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ p(x) \mid (\exists n \in \mathbb{N}) (\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}) p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j} \right\}.$$

- (5)  $r(x)$  が  $x$  についての実係数有理式であるとは、実係数多項式  $p(x), q(x)$  が存在して  $r(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$  が成り立つことをいう。  
(高校流で説明すると、分母分子が整式である分数式のこと。)
- (6)  $\Omega \subset \mathbb{R}, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a \in \overline{\Omega}$  とする。 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が  $\infty$  に発散するとは、 $(\forall U \in \mathbb{R}) (\exists \delta > 0) (\forall x \in \Omega: |x - a| < \delta) f(x) > U$  が成り立つことをいう。このことを  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  と表す。
- (7)  $\Omega \subset \mathbb{R}, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$  とする。 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  が  $A$  に収束するとは、 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists U \in \mathbb{R}) (\forall x \in \Omega: x > U) |f(x) - A| < \varepsilon$  が成り立つことをいう。このことを  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  と表す。
- (8)  $\Omega \subset \mathbb{R}, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  とする。 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  が  $\infty$  に収束するとは、 $(\forall U \in \mathbb{R}) (\exists U' \in \mathbb{R}) (\forall x \in \Omega: x > U') f(x) > U$  が成り立つことをいう。このことを  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  と表す。

7.

- (1)  $A \subset \mathbb{R}^n$  とする。  $A$  が  $\mathbb{R}^n$  の開集合であるとは、  $(\forall x \in A) (\exists \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \subset A$  が成り立つことをいう。ただし  $B(x; \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \varepsilon\}$ .
- (2)  $A \subset \mathbb{R}^n$  とする。  $A$  が  $\mathbb{R}^n$  の閉集合であるとは、  $A$  の補集合が  $\mathbb{R}^n$  の開集合であることをいう。ただし  $A$  の補集合とは、  $A^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}$  のことをさす。
- (3)  $A \subset \mathbb{R}^n$  とするとき、  $\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$  を  $A$  の閉包と呼ぶ。ただし  $B(x; \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \varepsilon\}$ .

8.

- (1)  $A \subset \mathbb{R}$  が上に有界かつ、空集合でないならば、  $A$  の上限が存在する。
- (2)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が上に有界かつ単調増加な数列であるならば、ある  $a \in \mathbb{R}$  が存在して  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  が成り立つ。
- (3)  $(\forall a > 0) (\forall b > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) na > b$ .
- (4)  $I_n = [a_n, b_n] (n \in \mathbb{N})$  が減少する  $\mathbb{R}$  の閉区間  $(a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n < b_n, I_{n+1} \subset I_n)$  ならば  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ .  
 特に  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  ならば、  $(\exists c \in \mathbb{R}) \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ .
- (5)  $\{a_n\}$  は  $\mathbb{R}^n$  の点列で、有界ならば、  $\{a_n\}$  は収束部分列を持つ。すなわち各項が自然数である狭義単調増加な数列  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  と、  $a \in \mathbb{R}$  が存在して  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$  が成り立つ。
- (6)  $K$  は  $\mathbb{R}^n$  の有界な閉集合で、  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  は連続とすると、  $f$  は  $K$  で最大値を持つ ( $f$  の値域  $f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$  の最大値が存在する)。すなわち  $(\exists a \in K) (\forall x \in K) f(a) \geq f(x)$ .
- (7)  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が連続で、  $f(a) = f(b)$ ,  $f$  は  $(a, b)$  で微分可能ならば、  $(\exists c \in (a, b)) f'(c) = 0$ .
- (8)  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  が連続で、  $f$  は  $(a, b)$  で微分可能ならば、  $(\exists c \in (a, b)) f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

9. (1) (a)  $\emptyset$  と  $\mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合である。(b) 集合族  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が、  $(\forall \lambda \in \Lambda) U_\lambda$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合、を満たすならば  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合である。(c)  $U_1$  と  $U_2$  が  $\mathbb{R}^n$  の開集合ならば、  $U_1 \cap U_2$  も  $\mathbb{R}^n$  の開集合である。(2)  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  が連続であること。

この 9 の閉集合版も重要である。(1) では、「開集合」を「閉集合」に、  $\cup$  を  $\cap$  に、  $\cap$  を  $\cup$  に変える。(2) では、「開集合」を「閉集合」に、  $<$  を  $\leq$  に、  $>$  を  $\geq$  に、  $\neq$  を  $=$  に変える。

10. 講義ノートの付録 D 節に「陰関数定理を覚える」という説明を書いている (pp. 126 辺り)。

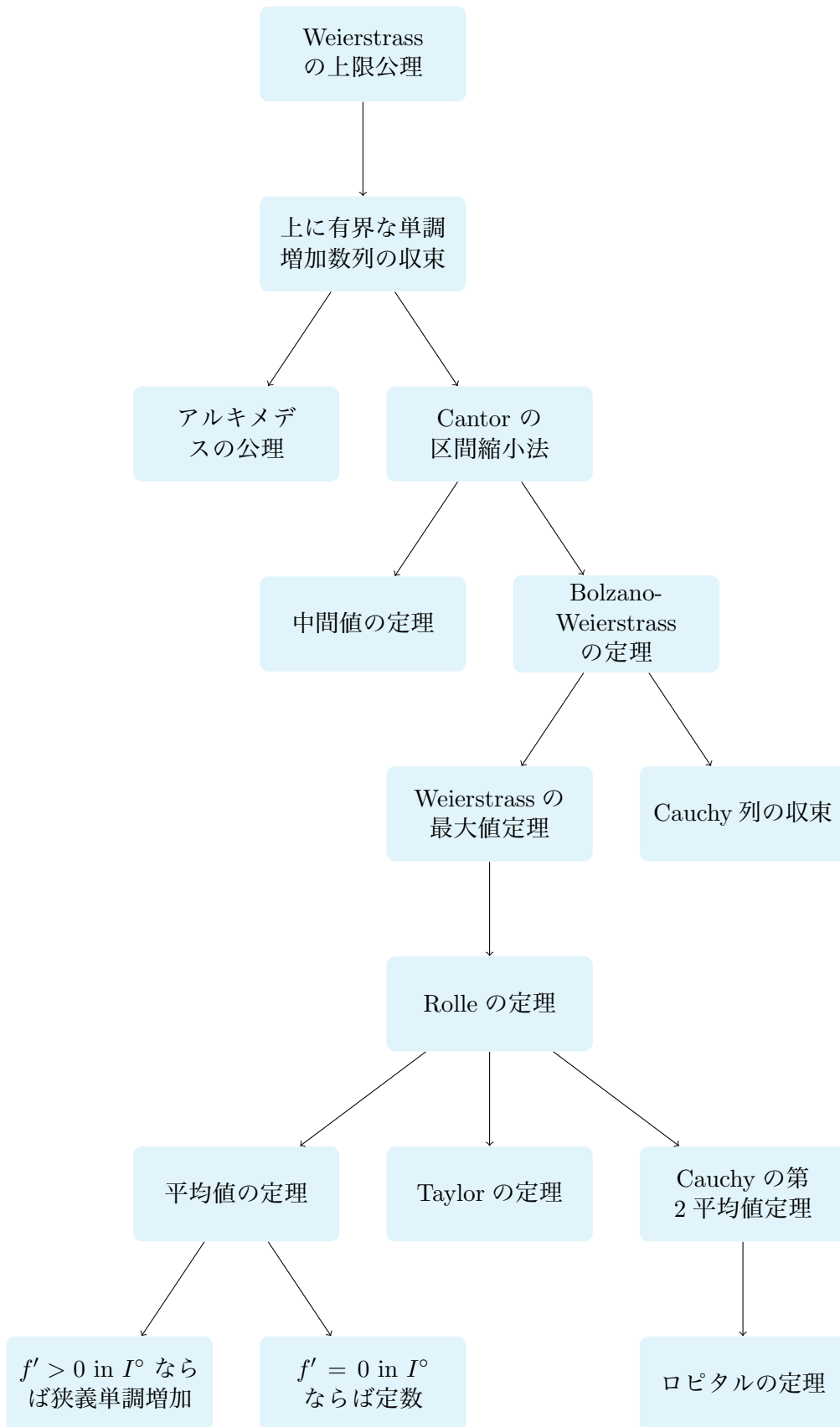
- (1) **(逆関数定理)**  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合、  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $C^1$  級、  $a \in \Omega, \det f'(a) \neq 0$  ならば、  $(\exists U: a$  を含む開集合)  $(\exists V: b = f(a)$  を含む開集合)  $\tilde{f} = f|_U: U \rightarrow V$  を  $\tilde{f}(x) = f(x) (x \in U)$  で定めると  $\tilde{f}$  は全単射で、逆関数  $\tilde{f}^{-1}: V \rightarrow U$  も  $C^1$  級である。
- (2) **(陰関数定理)**  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  の開集合、  $F: \Omega \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}^n$  は  $C^1$  級、  $(a, b) \in \Omega, F(a, b) = 0, \det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$  が成り立つとする。このとき、  $a$  を含む  $\mathbb{R}^m$  の開集合  $U, b$  を含む  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $V, C^1$  級の関数  $\varphi: U \rightarrow V$  で、以下の (i)–(iv) を満たすものが存在する。
  - (i)  $U \times V \subset \Omega$ .

(ii)  $\forall(x, y) \in U \times V$  について、 $F(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$ .

(iii)  $\varphi(a) = b$ .

(iv)  $\forall x \in U$  について、 $\varphi'(x) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))$ .

(実は (iii) は仮定  $F(a, b) = 0$  と (ii) から出るし、(iv) も後から合成関数の微分をするだけで出せるので、絶対に必要なのは (i) と (ii) だけである。)



最初の Weierstrass の上限公理のみ証明していない(それもあって「公理」と呼んでいる。)