

2014年度 数学解析 期末試験問題

2014年7月30日 13:00~15:00 施行, 担当 桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1.
 - (1) \mathbb{R} の部分集合が上に有界であることの定義を述べよ。
 - (2) \mathbb{R} の部分集合の上限の定義を述べよ。
 - (3) 次のいずれかを選んで解答せよ。(a) Weierstrass の上限公理を仮定して以下の命題を証明せよ。「 \mathbb{R} の空でない部分集合 A が下に有界ならば、 A は下限を持つ。」(b) 「 \mathbb{R} の部分集合 A が最大値 M を持つならば、 M は A の上限である。」
2. (1) 数列が無限大に発散することの定義を述べよ。(2) アルキメデスの公理 (原理) を書け。
(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ を証明せよ。
3. (1) \mathbb{R} の区間で定義された実数値関数が連続であることの定義を書け。(2) 以下の各関数が \mathbb{R} で連続であることを ε - δ 論法で証明せよ。(a) $c \in \mathbb{R}$ とするとき、 $f(x) = c$ ($x \in \mathbb{R}$) で定義される $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (b) $g(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) で定義される $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (3) 1 変数の多項式関数とは何か説明し、それが \mathbb{R} で連続となる根拠を述べよ。
4. 次のいずれかを証明せよ。(2)~(4) については、その定理自体も書くこと。
(1) 「上に有界な単調増加数列は収束する。」(2) 区間縮小法の原理 (3) Bolzano-Weierstrass の定理
(4) Rolle の定理
((2)~(4) の証明には、それ以前に書かれている定理を用いて良い。(4) を証明する場合、閉区間が閉集合であることを使うならば、その根拠を書くこと。)
5. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x, y) = x + 2y$, $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) で定め、 $N_g := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ とおく。
(1) Weierstrass の最大値定理を書け。(2) N_g の概形を描き、 N_g は有界であることを示せ。(3) N_g が \mathbb{R}^2 の閉集合であることを証明せよ。(4) f の N_g 上の最大値と最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ。