2024 年度 信号処理とフーリエ変換 期末試験問題

2025 年 1 月 28 日 (火曜) 13:30〜14:30 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下の 5 問に解答せよ。解答の順番は自由である (各問の解答は一箇所にまとめること)。

問 1.　周期 2π の関数 f, g を $f(x)=\frac{1}{2}x|x|$ $(x\in[-\pi,\pi))$, $g(x)=|x|$ $(x\in[-\pi,\pi))$ で定める。
(1) f と g のグラフを描け。(2) f と g の Fourier 級数を求めよ。(3) Gibbs の現象とはどういうものか説明せよ。f と g の Fourier 級数のうち、Gibbs の現象を起こすものはどちらか。それはなぜか。

問 2.　$a>0$ に対して $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を $f(x)=e^{-ax^2}$ $(x\in\mathbb{R})$ で定めるとき、以下のものを求めよ (計算せよ)。
(2), (3) について、知っている公式を用いる場合は、その公式を書き、可能ならばそれを導出すること。
(1) f の Fourier 変換 $g:=\mathscr{F}f$　(2) g の Fourier 変換 $h:=\mathscr{F}g=\mathscr{F}\mathscr{F}f$　(3) $\mathscr{F}[f(x)e^{2ix}](\xi)$ $(\xi\in\mathbb{R})$

問 3.　$N\in\mathbb{N}$ に対して $\omega:=e^{2\pi i/N}$ とおく。周期 N の周期数列 $f,g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ に対して、$f*g(n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}f(n-k)g(k)$ $(n\in\mathbb{Z})$ とおく (周期数列 f と g の畳み込み)。また、周期 N の周期数列 $h\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ に対して、$\mathscr{F}h(n)=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}h(j)\omega^{-nj}$ $(n\in\mathbb{Z})$ とおく (周期数列 h の Fourier 変換)。
(1) $f*g$ は周期 N の周期数列であることを示せ。(2) $\mathscr{F}h$ は周期 N の周期数列であることを示せ。(3) $h=f*g$ であるとき、$\mathscr{F}h(n)=N\mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n)$ $(n\in\mathbb{Z})$ が成り立つことを示せ。

問 4.　(1) サンプリング定理について説明せよ。(2) 音楽 CD の規格では、サンプリング周波数を 44.1 kHz と定めている理由を説明せよ。

問 5.　$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{C}$ への写像を離散信号と呼び、その全体を $\mathscr{S}$ と表す。

(1) $F\colon\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ が線形定常フィルターとはどういうことか、定義を述べよ。

(2) 連続信号 $X(t)=e^{i\Omega t}$ ($t\in\mathbb{R}$; Ω はある実数) をサンプリング周期 T_s (>0) でサンプリングして得られた離散信号が等比数列であることを示せ。

(3) 線形定常フィルター F の単位インパルス応答 h とは何か、定義を述べよ。また $F[x]=h*x$ $(x\in\mathscr{S})$ が成り立つことを示せ。

(4) 線形定常フィルターの周波数特性とは何か、定義を述べよ。

略解

問 1 解説　計算があまり面倒にならないような問題にしてみた (つもりなのだが…)。

(1) 図の組版は面倒なので手抜きする。これが良い答えというわけではないが、こんなふうになるよと。

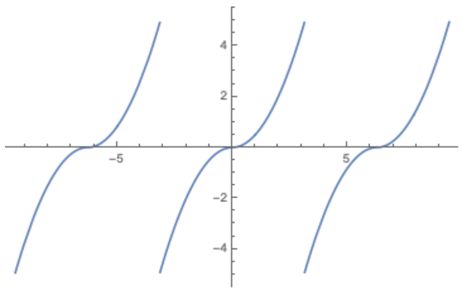

図 1: f のグラフ

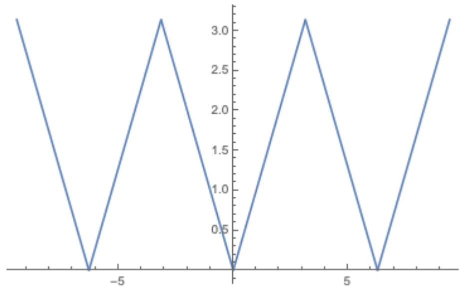

図 2: g のグラフ

(2)　f は奇関数だから $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}x^2\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin nx\,dx,$$

$$\int_0^{\pi} x^2\sin nx\,dx = \left[x^2\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\frac{\cos nx}{n}\,dx = \frac{\pi^2(-1)^{n-1}}{n} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx,$$

$$\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx = 0 + \left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2(-1)^{n-1}}{n} + \frac{2}{n}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{n}(-1)^{n-1} + \frac{2((-1)^n-1)}{n^3\pi}.$$

Mathematica は $b_n = -\dfrac{1}{n^3\pi}\left(2 - 2(-1)^n + (-1)^n n^2\pi^2\right)$ と返す。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}(-1)^{n-1} + \frac{2((-1)^n-1)}{n^3\pi}\right)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1) + (-1)^{n-1}n^2\pi^2)}{n^3\pi}\sin nx.$$

g は偶関数だから $b_n = 0$. $n \in \mathbb{N}$ のときは

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2(-1+(-1)^n)}{n^2\pi}$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi} & (n \text{ は奇数}) \\ 0 & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

一方

$$a_0 = 2\int_0^{\pi} x\,dx = 2\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

ゆえに

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1+(-1)^n)}{n^2\pi}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

(3)　Gibbs の現象とは、トビのある不連続関数の Fourier 級数展開に現れる現象である。関数 g の不連続点 (上の例の場合は $x = (2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) の近くでは、部分和 s_n のグラフには大きなジグザグがあり、$g(x+0)$, $g(x-0)$ からのズレ (縦に測って) が n が変わってもほぼ一定である。一方、ジグザグしている範囲の横幅は n が増加するにつれ 0 に近づく。

f は連続かつ区分的に C^1 級なので、f の Fourier 級数は f に一様収束し、Gibbs の現象は起こらない。g は区分的に C^1 級であるが $x = (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ で左右からの極限値 $g(x-0), g(x+0)$ が異なっているので、Gibbs の現象が起こる。■

問 2 解説　(5 つの Fourier 変換の導出は覚えるように言ってある。)

(1)

$$-ax^2 - ix\xi = -a(x^2 + ix\xi/a) = -a\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4a}.$$

であるから

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/(4a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+i\xi/2)^2} dx.$$

$F(z) := e^{-az^2}$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則であるから、$C_R := [-R, R] + [R, R + i\xi/2] - [-R + i\xi, R + i\xi] - [-R, -R + i\xi/2]$ とおくとき、Cauchy の積分定理より $\displaystyle\int_{C_R} F(z)\, dz = 0$. $R \to +\infty$ のとき $[R, R + i\xi/2]$, $[-R, -R + i\xi/2]$ に沿った積分はともに 0 に収束するので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+i\xi/2)^2} dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R+i\xi/2, R+i\xi/2]} F(z)\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} F(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx.$$

ここで $u = \sqrt{a}x$ とおくと、$dx = \dfrac{du}{\sqrt{a}}$ であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, \frac{du}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

ゆえに

$$\mathscr{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/(4a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/(4a)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

(別解)

$$\begin{aligned}
g'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\xi} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ixe^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i}{2a} e^{-ax^2}\right)' e^{-ix\xi} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\frac{i}{2a} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2a} e^{-ax^2} (-i\xi) e^{-ix\xi} dx \right\} \\
&= -\frac{\xi}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = -\frac{\xi}{2a} g(\xi).
\end{aligned}$$

また

$$g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

$y = g(\xi)$ とおくと、

$$\frac{dy}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a} y, \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

これは常微分方程式の初期値問題である。第 1 式から、$\log y = -\dfrac{\xi^2}{4a} + C$ (C は積分定数). ゆえに $y = C' e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$. 第 2 式から $C' = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$. ゆえに $g(\xi) = y = \dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

(2) 反転公式 $\mathscr{F}^*\mathscr{F}f = f$, また Fourier 変換・共役 Fourier 変換の定義から分かる $\mathscr{F}^*g(x) = \mathscr{F}g(-x)$ より $\mathscr{F}\mathscr{F}f(x) = f(-x)$. ゆえに

$$h(x) = \mathscr{F}\mathscr{F}f(x) = f(-x) = f(x) = e^{-ax^2}.$$

(別解) $\mathscr{F}\left[e^{-ax^2}\right](\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ が分かったので、$a' = \frac{1}{4a}$ として $\mathscr{F}\left[e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\right](x) = \mathscr{F}\left[e^{-a'\xi^2}\right](x) = \frac{1}{\sqrt{2a'}} e^{-\frac{x^2}{4a'}} = \sqrt{2a} e^{-ax^2}$. これを $\sqrt{2a}$ で割って $\mathscr{F}\mathscr{F}f(x) = e^{-ax^2}$.

(3)

$$\mathscr{F}\left[f(x)e^{2ix}\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2ix} \cdot e^{-ix\xi}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix(\xi-2)}\, dx = g(\xi - 2) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{(\xi-2)^2}{4a}}. \blacksquare$$

問 3 解説

(1) $f((n+N)-k) = f((n-k)+N) = f(n-k)$ であるから

$$f * g(n+N) = \sum_{k=0}^{N-1} f((n+N)-k)g(k) = \sum_{k=0}^{N-1} f(n-k)g(k) = f * g(n).$$

ゆえに $f * g$ は周期 N である。

(2) $\omega^N = 1$ であるから任意の $p \in \mathbb{Z}$ に対して $\omega^{pN} = 1$. ゆえに

$$\omega^{-(n+N)j} = \omega^{-nj}\omega^{N(-j)} = \omega^{-nj} \cdot 1 = \omega^{-nj}$$

であることを注意しておく。

$$\mathcal{F}h(n+N) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-(n+N)j} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-nj} = \mathcal{F}h(n).$$

ゆえに $\mathcal{F}h$ は周期 N である。

(3) 離散 Fourier 変換の定義式に畳み込みの定義式を代入して、和の順序交換をすると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}h(n) &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h(j)\omega^{-nj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} f(j-k)g(k)\right)\omega^{-nj} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{N-1} f(j-k)\omega^{-nj}\right)g(k)\end{aligned}$$

$\ell := j-k$ とおき、j を ℓ に変数変換する。$0 \le j \le N-1$ より $-k \le \ell \le N-1-k$, $\omega^{-nj} = \omega^{-n(k+\ell)} = \omega^{-n\ell}\omega^{-nk}$ であるから

$$\mathcal{F}h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=-k}^{N-1-k} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)\omega^{-nk}g(k).$$

$\ell \mapsto f(\ell)\omega^{-n\ell}$ は周期 N であるから、$\displaystyle\sum_{\ell=-k}^{N-1-k}$ を $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{N-1}$ で置き換えても値は変わらない。

$$\mathcal{F}h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\right)\omega^{-nk}g(k). = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell)\omega^{-n\ell}\sum_{k=0}^{N-1} g(k)\omega^{-nk} = N\mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n).\blacksquare$$

問 4 解説

(1) 「(連続) 信号をサンプリング周波数 f_s でサンプリングするとき、信号に $f_s/2$ 以上の周波数成分が含まれていなければ、サンプリングしたデータから元の信号が復元できる (復元する公式がある)。」という命題である。

(2) 人間が聞こえる音の周波数は $20 \sim 20,000$ Hz であると言われている (可聴周波数帯域, 可聴域と呼ばれる)。年齢があがると狭くなる (特に高い音が聞こえにくくなる)、20 Hz より低い音は、音と感じるよりも振動として感知される、とか言われている。20000 Hz までの音をデジタル録音・再生するためには、サンプリング周波数は 40000 Hz より高いことが必要十分である (サンプリング定理による)。一方でサンプリング周波数を高くするとデータ量が大きくなる。20000 Hz までの音が記録できて、なおかつデータ量があまり大きくなりすぎないように、44.1 kHz に決められたと考えられる。

(蛇足) $44100 = (2\cdot 3\cdot 5\cdot 7)^2$ なので “たくさん” 素因数分解できて (FFT が効率的に計算できる)、ルートもキリがいい ($\sqrt{44100} = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210$) ことも関係があるのかもしれない、と個人的には考えているが、推測の域を出ない。 ■

問 5 解説

(1)　デジタル・フィルター $F\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ (ただし $\mathcal{S} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$) が線形定常であるとは、$F$ が線形かつ定常であることをいう。

F が線形であるとは

$$F[x+y] = F[x] + F[y] \quad (x, y \in \mathcal{S}), \quad F[\lambda x] = \lambda F[x] \quad (x \in \mathcal{S},\, \lambda \in \mathbb{C})$$

をみたすことをいう。

またFが定常であるとは

$$F[x(\cdot - k)] = F[x](\cdot - k) \quad (x \in \mathcal{S},\, k \in \mathbb{Z})$$

を満たすことをいう。

(2)　一般に $X(t)$ をサンプリング周期 T_s でサンプリングして得られる離散信号が $\{x(n)\}$ であるとは、

$$x(n) = X(nT_s) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ということである。$X(t) = e^{i\Omega t}$ の場合は

$$x(n) = X(nT_s) = e^{i\Omega(nT_s)} = \left(e^{i\Omega T_s}\right)^n = \omega^n, \quad \omega := e^{i\Omega T_s}.$$

ゆえに $\{x(n)\}$ は公比 $\omega = e^{i\Omega T_s}$ の等比数列である。

(サンプリング周波数 $F_s = 1/T_s$ で問う年度もある。混同しないように。)

(3)　$\delta(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \end{cases}$ で定まる $\delta \in \mathcal{S}$ を単位インパルスと呼び、線形定常フィルター F に対して $h := F[\delta]$ を F の単位インパルス応答と呼ぶ。

すべての $x \in \mathcal{S}$ は

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(\cdot - k)$$

と表されるので

$$\begin{aligned}
F[x] &= F\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(\cdot - k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)F[\delta(\cdot - k)] \quad (\text{線形性}) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)F[\delta](\cdot - k) \quad (\text{定常性}) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(\cdot - k) \quad (h\,\text{の定義}) \\
&= h * x = x * h \quad (\text{畳み込みの定義と可換性}).
\end{aligned}$$

(4) 線型定常フィルター F の周波数特性とは、その単位インパルス応答 $h := F[\delta]$ の離散時間 Fourier 変換

$$\widehat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-in\omega}$$

のことをいう。■