2019 年度 信号処理とフーリエ変換 期末試験問題

2020 年 1 月 29 日 (水曜) 15:00〜16:00 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下の 6 問の中から 5 問を選択して解答せよ。各問の解答の順番は自由である (各問の解答は一箇所にまとめること)。

問 1. f と g は $\mathbb{R}$ で定義された周期 2π の周期関数であり、$f(x) = x^3$ $(-\pi < x \le \pi)$, $g(x) = 3x^2$ $(-\pi < x \le \pi)$ を満たすとする。このとき、以下の問に答えよ。
(1) f と g のグラフを描け。(2) f と g の Fourier 級数を求めよ。(3) f と g の Fourier 級数のうち、一様収束するのはどちらか、理由をつけて答えよ。

問 2. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を $g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \le 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$ で定めるとき、以下のものを求めよ。

(1) $\mathscr{F}g$ (2) $\mathscr{F}(\mathscr{F}g)$ (3) $\mathscr{F}[g(x-1)](\xi)$ (注: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、$\mathscr{F}f(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$)

問 3. 周期 2π の周期関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して、$\mathscr{F}f(n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ $(n \in \mathbb{Z})$ とおく。また周期 2π の周期関数 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の畳み込み $f * g$ を $f * g(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y)\, dy$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める。このとき $\mathscr{F}(f * g)(n) = \mathscr{F}f(n) \mathscr{F}g(n)$ が成り立つことを示せ。

問 4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続で、$x \to \pm\infty$ のとき十分速く 0 に収束すると仮定する。このとき

(a) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0),$$
(b) $$u(x,0) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たす関数 $u\colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を求めることを考える。

(1) a は正の定数, $\varphi(x) = e^{-ax^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ とするとき、$\mathscr{F}\varphi$ は何か? (結果だけ書けば良い。)

(2) $\widehat{u}(\xi, t) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-ix\xi} dx$ の満たす微分方程式の初期値問題を導き、$\widehat{u}(\xi, t)$ を求めよ。

(3) $\widehat{u}(\xi, t)$ の ξ に関する共役 Fourier 変換を計算して、$u(x,t)$ を求めよ。

問 5. N を 2 以上の自然数として、x_j $(j \in \mathbb{Z})$ を $h = 2\pi/N$, $x_j = jh$ で定める。$n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\varphi_n(x) := e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{\varphi}_n := (\varphi_n(x_0), \varphi_n(x_1), \cdots, \varphi_n(x_{N-1}))^T$$

とおく (ただし ^{T} は転置を表す)。
(1) $n, m \in \mathbb{Z}$, $0 \le n \le N-1$, $0 \le m \le N-1$ とするとき、内積 $(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_m)$ を計算せよ。
(2) 行列 U を $U := (\boldsymbol{\varphi}_0, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_{N-1})$ で定めるとき、逆行列を求めよ。結果だけでなく、途中経過を書くこと。

問 6. $S = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ を離散信号の全体、$F\colon S \to S$ を線形定常フィルター、h を F の単位インパルス応答、$\widehat{h}$ を h の離散時間 Fourier 変換とする ($\widehat{h}(\omega) := \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-ik\omega}$)。このとき以下の問に答えよ。
(1) F の単位インパルス応答とは何か説明せよ。(2) $\omega > 0$ とするとき、$x \in S$ を $x(n) = \sin(n\omega)$ $(n \in \mathbb{Z})$ で定めるとき、$F[x] = \widehat{h}(\omega) x$ であることを示せ。(3) $f = 441$, $T_s = \dfrac{1}{44100}$ に対して、$Y(t) := \sin(2\pi f t)$ $(t \in \mathbb{R})$, $y(n) := Y(nT_s)$ $(n \in \mathbb{Z})$ とおく。$\widehat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \le \frac{\pi}{100}) \\ 0 & (|\omega| > \frac{\pi}{100}) \end{cases}$ と仮定するとき、$F[y]$ を求め、その結果を説明せよ。

1. (1) 2 点ずつ　(2) 6 点と 5 点　(3) 5 点確認コード

```
FourierSinCoefficient[x^3, x, n]
Plot[Sum[-2 (-1)^n (-6 + n^2 Pi^2)/n^3 Sin[n x], {n, 1,
   10}], {x, -3 Pi, 3 Pi}]

FourierCosCoefficient[3 x^2, x, n]
Integrate[3 x^2, {x, -Pi, Pi}]/Pi
g0[x_] := 3 x^2
g[x_] := g0[Mod[x, 2 Pi, -Pi]]
Plot[{g[x],
  Pi^2 + Sum[12 (-1)^n/(n^2) Cos[n x], {n, 1, 10}]}, {x, -3 Pi, 3 Pi}]
```

(1) グラフは次のようになる。

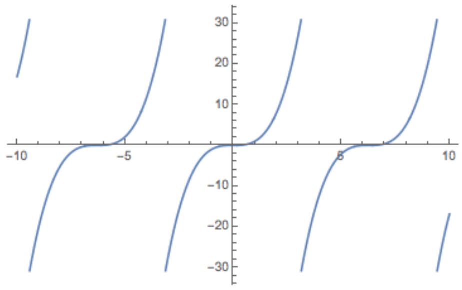

図 1: f のグラフ

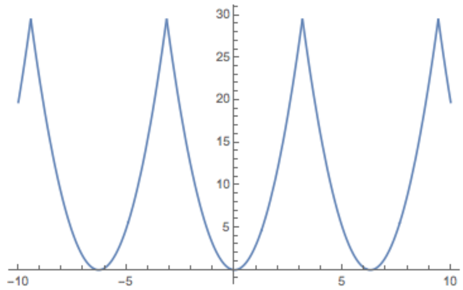

図 2: g のグラフ

(2) f は奇関数であるから、$a_n = 0$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x^3\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 3x^2\frac{\cos nx}{n}\,dx\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\pi^3}{n} + \left(\left[3x^2\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 6x\frac{\sin nx}{n^2}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\pi^3}{n} + \left(\left[6x\frac{\cos nx}{n^3}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 6\frac{\cos nx}{n^3}dx\right)\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\pi^3}{n} + 6\pi\frac{(-1)^n}{n^3}\right) = \frac{2(-1)^{n-1}\left(n^2\pi^2 - 6\right)}{n^3}.
\end{aligned}$$

ゆえに f の Fourier 級数展開は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}(n^2\pi^2 - 6)}{n^3}\sin nx.$$

あるいは

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)(-1)^n \sin nx.$$

g は偶関数であるから $b_n = 0$. また $n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3x^2\cos nx\,dx = \frac{6}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin nx}{n}\,dx\right)\\
&= -\frac{12}{n\pi}\left(\left[x\frac{-\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\,dx\right) = -\frac{12}{n\pi}\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{12(-1)^n}{n^3}.
\end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(0\cdot x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3x^2\,dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{6}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = 2\pi^2.$$

ゆえに g の Fourier 級数展開は

$$g(x) = \pi^2 + 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

(3) f は区分的 C^1 級であるが、$(2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ は左右からの極限値の異なる不連続点である。ゆえに f の Fourier 級数では Gibbs の現象が起こり、一様収束はしない。一方 g は連続かつ区分的 C^1 級であるから、g の Fourier 級数は一様収束する。■

問 2　(1) 10 点　(2) 5 点　(3) 5 点

(1)

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}g(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-|x|)\left(\cos(x\xi)-i\sin(x\xi)\right)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 (1-x)\cos(x\xi)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\left[(1-x)\frac{\sin(x\xi)}{\xi}\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\cdot\frac{\sin(x\xi)}{\xi}dx\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{\cos(x\xi)}{\xi^2}\right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\xi}{\xi^2}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\mathscr{F}(\mathscr{F}g)(\xi) = g(-\xi) = g(\xi) = \begin{cases} 1-|\xi| & (|\xi|<1) \\ 0 & (|\xi|>1). \end{cases}
$$

(3) $u = x-1$ とおくと、$dx = du$, $e^{-ix\xi} = e^{-i(u+1)\xi} = e^{-iu\xi}e^{-i\xi}$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[g(x-1)\right](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x-1)e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-iu\xi}e^{-i\xi}\,du = e^{-i\xi}\mathscr{F}g(\xi) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-i\xi}(1-\cos\xi)}{\xi^2}.\blacksquare
\end{aligned}
$$

問 3　20 点

$h := f*g$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)e^{-inx}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx\right)g(y)\,dy.
\end{aligned}
$$

右辺の (　) 内の積分を変数変換する。$u = x-y$ とおくと、$dx = du$, $x=-\pi$ のとき $u = -\pi - y$, $x = \pi$ のとき $u = \pi - y$, $x = u+y$, $e^{-inx} = e^{-in(u+y)n} = e^{-inu}e^{-iny}$ であるから、

$$
\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx}dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)e^{-in(u+y)}\,du = e^{-iny}\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)e^{-inu}\,du.
$$

関数 $u \mapsto f(u)e^{-inu}$ は周期 2π であるから、$[-\pi-y, \pi-y]$ での積分は $[-\pi,\pi]$ での積分に等しい。

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f*g](n) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-iny}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}\,du\right)g(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}\,du\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}\,dy \\
&= \mathscr{F}f(n)\mathscr{F}g(n).\blacksquare
\end{aligned}
$$

「f が周期的だから」とか、単に「周期性から」は 2 点減点します (必要なのは被積分関数 $f(u)e^{-inu}$ が周期 2π であることですね)。何も言わず最初から $\int_{-\pi}^{\pi}$ とするのは 8 点減点 (それは明らかにおかしい)。

問 4　(1) 5 点　(2) 7 点 (初期値問題にする 4 点, 解く 3 点)　(3) 8 点

(1) 結果だけで良いけれど、個人的には丸暗記している訳ではないので、次のように解く (参考までに)。

$$-ax^2 - ix\xi = -a(x^2 + ix\xi/a) = -a\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4a}.$$

また $u = \sqrt{a}x$ とおくと、$dx = \dfrac{du}{\sqrt{a}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\frac{du}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

ゆえに (積分路の変形をして)

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\varphi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+i\xi/2)^2}e^{-\xi^2/(4a)}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/(4a)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/(4a)}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.\end{aligned}$$

(2) (a), (b) を x について Fourier 変換すると

$$\frac{d}{dt}\widehat{u}(\xi,t) = -\xi^2\widehat{u}(\xi,t), \quad \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi).$$

ゆえに

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-t\xi^2}\widehat{f}(\xi).$$

(3) 一般に $\mathscr{F}[f*g] = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}f\mathscr{F}g$ である。

$$G(x,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}^*\left[e^{-t\xi^2}\right](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}\left[e^{-t\xi^2}\right](-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

とおくと、

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{F}\left[G(\cdot,t)\right](\xi) = e^{-t\xi^2}.$$

ゆえに

$$\widehat{u}(\xi,t) = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}\left[G(\cdot,t)\right](\xi)\mathscr{F}f(\xi) = \mathscr{F}\left[G(\cdot,t)*f\right](\xi).$$

ゆえに

$$u(x,t) = G(\cdot,t)*f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}f(y)\,dy.\blacksquare$$

問 5　(1) 10 点　(2) 10 点

(離散 Fourier 変換の選点直交性と、それを用いた逆変換の導出という、理論の「まん中部分」を抜き出してみる、という問題)

(1) 任意の $n, j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\varphi_n(x_j) = \varphi_n(jh) = e^{injh} = \omega^{nj}.$$

ただし

$$\omega := e^{ih} = e^{i\frac{2\pi}{N}} = e^{2\pi i/N}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \begin{pmatrix}\omega^{n\cdot 0}\\ \omega^{n\cdot 1}\\ \vdots\\ \omega^{n\cdot(N-1)}\end{pmatrix}.$$

ゆえに $n, m \in \mathbb{Z}$, $0 \le n \le N-1$, $0 \le m \le N-1$ とするとき

$$(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_m) = \sum_{j=0}^{N-1}\omega^{nj}\overline{\omega^{mj}} = \sum_{j=0}^{N-1}\omega^{(n-m)j} = \begin{cases} N & (n-m\equiv 0 \pmod N)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases} = \begin{cases} N & (n=m)\\ 0 & (n\ne m).\end{cases}$$

(2)

$$U = (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_1, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_{N-1}) = \left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right).$$

$$U^* U = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_0^* \\ \boldsymbol{\varphi}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_{N-1}^* \end{pmatrix} (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_1, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_{N-1}) = \left(\boldsymbol{\varphi}_j^* \boldsymbol{\varphi}_k\right) = ((\boldsymbol{\varphi}_k, \boldsymbol{\varphi}_j)) = (N\delta_{kj}) = NI.$$

ゆえに

$$U^{-1} = \frac{1}{N} U^* = \frac{1}{N} \left(\overline{\omega^{(k-1)(j-1)}}\right) = \frac{1}{N} \left(\omega^{-(k-1)(j-1)}\right).$$

(時間切れによって中断)