2018年度 信号処理とフーリエ変換 期末試験問題

2019年1月24日 (木曜) 施行
担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下の6問の中から5問を選択して解答せよ。各問の解答の順番は自由である。
以下で説明なしに用いている記号は講義に出て来たものである。

問 1.　W は正の定数であり、f と g は $\mathbb{R}$ で定義された周期 $2W$ の周期関数であり、

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < W) \\ -1 & (-W < x < 0), \\ 0 & (x = 0, W) \end{cases} \qquad g(x) = |x| \quad (-W < x \le W)$$

を満たすとする。このとき、以下の問に答えよ。
(1) f と g のグラフを描け。(2) f と g の Fourier 級数を求めよ。(3) f と g の Fourier 級数のうち、一様収束するのはどちらか、理由をつけて答えよ。
(周期が 2π でない周期関数の Fourier 級数が分からない場合、$W = \pi$ として解答せよ。)

問 2.　正定数 a に対して、$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = e^{-a|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ により定めるとき、以下の問いに答えよ。(1) f の Fourier 変換 $\mathscr{F}f(\xi) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$ $(\xi \in \mathbb{R})$ を求めよ。　(2) $g := \mathscr{F}f$ とおくとき、g の Fourier 変換 $\mathscr{F}g$ を求めよ。

問 3.　$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は C^1 級で、$|x| \to +\infty$ のとき $f(x)$ と $f'(x)$ は十分速く 0 に近づくとする。このとき、以下の (1), (2), (3) を示せ。ただし、$\mathscr{F}$ は問2にも現れた Fourier 変換、f' は f の導関数、c は実数の定数とする。
(1) $\mathscr{F}[f'](\xi) = i\xi \mathscr{F}f(\xi)$　(2) $\dfrac{d}{d\xi}\mathscr{F}f(\xi) = \mathscr{F}\left[-ixf(x)\right](\xi)$　(3) $\mathscr{F}[f(x)e^{icx}](\xi) = \mathscr{F}f(\xi - c)$.

問 4.　(1) 周期 T の周期関数 f の Fourier 係数 $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} dt$ に対して、N 項離散 Fourier 係数 $C_n = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{-nj}$, $\omega := e^{2\pi i/N}$ がその近似と考えられるのはなぜか (ただし f_j は f を適当にサンプリングして得られる値とする)。
(2) サンプリング周波数 44100 Hz で PCM 録音して得られたデータから、連続 $N = 4410$ 個のデータ $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ を取り出し、N 項離散 Fourier 変換したデータを $\{C_n\}_{n=0}^{N-1}$ とするとき、以下の (a)〜(d) に答えよ。
(a) ($\{f_j\}$ は) 何秒分の音声データに相当するか。(b) $C_n = \overline{C_{N-n}}$ が成り立つ。それはなぜか。
(c) C_n は何 Hz の周波数に対応しているか。(d) ピアノやギターの音の場合、$\{C_n\}$ はどういう特徴を持つか。

問 5.　(1) (離散信号の) 単位インパルス δ とは何か、説明せよ。(2) 離散信号 x, y の畳み込み $x * y$ の定義を書き、$x * y = y * x$ が成り立つことを示せ。(3) 線形定常デジタル・フィルター F の単位インパルス応答 h とは何か、説明せよ。任意の離散信号 x に対して $F[x] = x * h$ が成り立つことを示せ。

問 6.　サンプリング定理について説明せよ。(定理を出来るだけ詳しく書き、例をあげて説明せよ。)

(2020/1/28 15:55:58 リクエストされたので少し書き足しました。)

1.

(1) 次の図

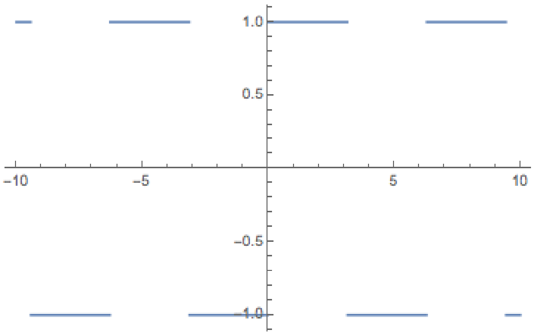

図 1: f のグラフ

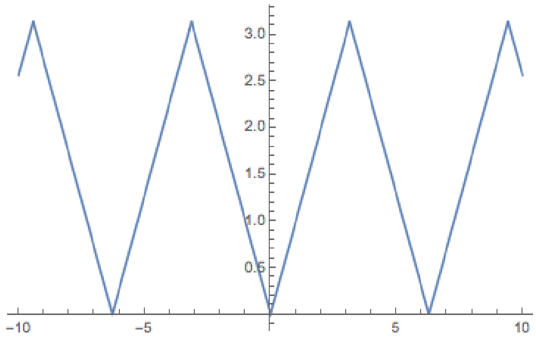

図 2: g のグラフ

(2) f は奇函数だから

$$a_n = \frac{2}{W}\int_{-W}^{W} f(x)\cos n\frac{\pi}{W}x\,dx = 0,$$
$$b_n = \frac{2}{W}\int_{-W}^{W} f(x)\sin n\frac{\pi}{W}x\,dx = \frac{4}{W}\int_{0}^{W} f(x)\sin n\frac{\pi}{W}x\,dx.$$

$u = \frac{\pi}{W}x$ とおくと、$dx = \frac{W}{\pi}du$

$$b_n = \frac{4}{W}\int_0^W f(x)\sin n\frac{\pi}{W}x\,dx = \frac{4}{W}\int_0^{\pi} f\left(\frac{W}{\pi}u\right)\sin nu\cdot\frac{W}{\pi}du = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nu\,du$$
$$= -\frac{4}{n\pi}\left[\cos nu\right]_0^{\pi} = \frac{4(1-(-1)^n)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{8}{n\pi} & (n\text{ が奇数}) \\ 0 & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{W}}{1} + \frac{\sin\frac{3\pi x}{W}}{3} + \cdots\right)$$
$$g(x) = \frac{W}{2} - \frac{4W}{\pi^2}\left(\frac{\cos\frac{\pi x}{W}}{1^2} + \frac{\cos\frac{3\pi x}{W}}{3^2} + \cdots\right). \blacksquare$$

2. これは良く出て来て講義ノートにもあるので簡単に。「先生間違えている」という指摘があった。問題を取り違えていました。

(1) $\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\xi^2+a^2}$ (これは定義にしたがって計算するのが良い。) (2) $\mathcal{F}g(\xi) = f(-\xi) = e^{-a|-\xi|} = e^{-a|\xi|}$. $\blacksquare$

3.

(1)

$$\mathcal{F}[f'](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ix\xi}dx = \lim_{R_1,R_2\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R_1}^{R_2} f'(x)e^{-ix\xi}dx$$
$$= \lim_{R_1,R_2\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{-R_1}^{R_2} - \int_{-R_1}^{R_2} f(x)\frac{\partial}{\partial x}e^{-ix\xi}dx\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\xi)e^{-ix\xi}dx\right) = i\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$$
$$= i\xi\mathcal{F}f(\xi).$$

(2)

$$\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}f(\xi) = \frac{d}{d\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\xi}f(x)e^{-ix\xi}dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-ix\xi}dx = \mathcal{F}\left[-ixf(x)\right](\xi).$$

(3)

$$\mathcal{F}\left[f(x)e^{icx}\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{icx}e^{-ix\xi}dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(\xi-c)}dx = \mathcal{F}f(\xi-c).$$

おまけ: 平行移動の Fourier 変換 $u = x - c$ とすると、$dx = du$, $x = u + c$ なので

$$\mathcal{F}\left[f(x-c)\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-c)e^{-ix\xi}dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i(u+c)\xi}du$$
$$= e^{-ic\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iu\xi}du = e^{-ic\xi}\mathcal{F}f(\xi)$$

4. (1) 略解 c_n を定義する積分に対して、数値積分の台形公式を適用すると C_n の式になるから。(台形公式が書けて、式変形を実際にやってみせると素晴らしいけれど…、そこまで出来なくても、それなりの中間点をあげます。) (2) (a) 0.1 秒分 (b) これは簡単なので自力でやろう。音声信号の場合、$f(t)$ は実数 (だから $\overline{f(t)} = f(t)$) というのがポイント。 (c) 周期が 0.1 秒の信号を Fourier 級数展開したとみなすべきものなので、$n = 1$ は 10 Hz に対応している。C_n はその $|n|$ 倍の $10|n|$ Hz の周波数に対応している。