前回 (2023/12/20) の (“ローパスフィルターを設計する”) の思い出し　$0 < \omega_{\mathrm{e}} < \pi$ を満たす ω_{e} に対して、線形定常フィルター $F\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ($\mathcal{S} := \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} = \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$) で次の性質を持つものを求める (— 実はムシが良すぎる要求)。

$$\widehat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| < \omega_{\mathrm{e}}) \\ 0 & (\omega_{\mathrm{e}} < |\omega| \le \pi), \end{cases}$$

ここで $h = F[\delta]$ (F の単位インパルス応答), $\widehat{h}(\omega)$ は h の離散時間 Fourier 変換である:

$$\widehat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-in\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

$h = \{h(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は反転公式で求まる:

$$h_n = h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}(\omega) e^{in\omega} d\omega = \frac{\omega_{\mathrm{e}}}{\pi}\operatorname{sinc}(n\omega_{\mathrm{e}}).$$

任意の信号 $x \in S$ に対して、$y = F[x] \in \mathcal{S}$ は

$$F[x](n) = y_n = y(n) = x * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で与えられる。

ところが、実際には無限級数の計算は難しい。例えば $J \in \mathbb{N}$ として、$F[x](n)$ の代わりに

$$F^J[x](n) := \sum_{k=-J/2}^{J/2} x(n-k)h(k)$$

を用いることで満足 (我慢) するとかしないといけない。この場合は、$h(n)$ の代わりに、次を使ったと解釈できる。

$$h^J(n) = \begin{cases} h(n) & (|n| \le J/2) \\ 0 & (|n| > J/2). \end{cases}$$

当然 $F^J[x]$ は $F[x]$ と異なる。どのように異なるか？周波数特性を調べよう。

$$\widehat{h^J}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^J(n) e^{-in\omega} = \sum_{n=J/2}^{J/2} h(n) e^{-in\omega}.$$

このグラフは前回見た。$\widehat{h}(\omega)$ はグラフが “台形” だったが、$\widehat{h^J}(\omega)$ は波打っている。実は、Gibbs の現象である！

続き　(ここから新しい部分)

信号処理では、**windowing** (窓をかける) というテクニックを用いて対処する。

$h(n)$ をあるところから先いきなり 0 に変えるのではなく、$h(n)$ に**窓 (関数)** と呼ばれる、(段階的に 0 に近づき十分遠方では恒等的に 0 に等しい) 関数をかける。0 でない項を有限個のみにするのは同じであるが、マイルドに 0 に落とす。

窓関数には色々なものがあるが、ここでは次式で定義されるシンプルな **hann 窓**を用いてみる。

(1) $$w(x) := \frac{1-\cos 2\pi x}{2} \quad (0 \le x \le 1).$$

hann 窓ってどんな関数？

```
w[x_]:=(1-Cos[2Pi x])/2;
g=Plot[w[x],{x,0,1}]

J = 40
wn = Table[{n, w[n/J - 1/2]}, {n, -J/2, J/2}];
ListPlot[wn]
```

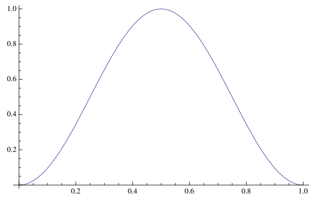

図 1: ハン窓 w のグラフ

$w\left(\frac{n}{J}-\frac{1}{2}\right)$ は、左右対称、$n=0$ でピーク、$\pm J/2$ で 0 になる。
この w を用いて、

$$h_n^{J,w} := \begin{cases} w(n/J-1/2)h_n & (|n| \le J/2) \\ 0 & (|n| > J/2) \end{cases}$$

で $\left\{h_n^{J,w}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を定め、$\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の代わりに $\left\{h_n^{J,w}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を用いることにする。

これは F に近いが、F とは異なるデジタル・フィルター $F^{J,w}$ を用いることになる。その周波数特性は

$$\widehat{h}^{J,w}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n^{J,w} e^{-in\omega} = \sum_{n=-J/2}^{J/2} h_n^{J,w} e^{-in\omega}.$$

この $\omega \mapsto \widehat{h}^{J,w}(\omega)$ のグラフを図示してみよう。

```
w[x_]:=(1-Cos[2 Pi x])/2
draw2[J_]:=Plot[Sum[w[n/J-1/2]h[n]Exp[-I n t],{n,-J/2,J/2}],{t,-Pi,Pi},
 PlotRange->All]

draw2[100]
```

これは (理想である) $\widehat{h}(\omega)$ とは違うけれど、$\widehat{h^J}(\omega)$ よりはずっと良いだろう。

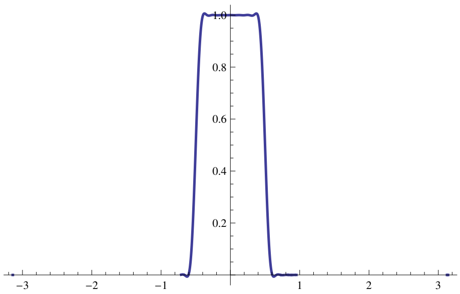

図 2: 窓関数あり $\widehat{h}^{J,w}(\omega)$

— こうして作った F (F^J) はローパス・フィルターと呼ばれるが、実際上どういうものか理解するために、以下の内容を話す。

離散信号の周波数と対応する連続信号の周波数　周波数特性 $\widehat{h}(\omega)$ の ω は、離散信号の角周波数を意味するが、実のところ何だろう？

イメージが湧きやすいよう、音声信号 $X(t)$ を考える。$X = X(t)$ は連続信号であり、それをサンプリング周波数 F_s でサンプリングして離散信号 $x = \{x(n)\}$ を作り、それを F に入力し、その出力 $y = F[x]$ をまたアナログ信号に直して、音として出力する。

正弦波 $X(t) = e^{i\Omega t}$ をサンプリング周期 T_s でサンプリングすると、等比数列

$$x = \{x(n)\}, \quad x(n) = e^{in\omega}, \quad \omega := \Omega T_s$$

が得られる。ここで T_s はサンプリング周期である: $T_s = \dfrac{1}{F_s}$.

実際

$$x_n = x(n) = X(nT_s) = e^{i\Omega n T_s} = e^{in\omega}, \quad \omega := \Omega T_s.$$

ω は、元の連続信号の周波数 $F = \Omega/(2\pi)$ に対応している。

$$\omega = \Omega T_s$$

から

(2) $$\Omega = \omega F_s.$$

周波数 $F = \Omega/(2\pi)$ については、この式を 2π で割って

(3) $$F = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi} F_s.$$

言葉で説明すると (慣れると覚えやすい)

離散信号の周波数 $\omega/(2\pi)$ に F_s をかけると、対応する連続信号の周波数になる。

(無次元の数に単位が Hz であるサンプリング周波数をかけると、Hz の量が得られる。)

問　サンプリング周波数 $F_s = 44100$ Hz で、ある正弦波 (周波数は $F_s/2$ 未満とする) をサンプリングしたとき、られた離散信号の角周波数は $\omega = \pi/10$ であった。その正弦波周波数 F は？

$$F = \frac{\pi/10}{2\pi} \cdot F_s = \frac{1}{20} \times 44100\ \text{Hz} = 2205\text{Hz}.\blacksquare$$

上のローパス・フィルター F は、$F_e := \dfrac{\omega_e}{2\pi} F_s$ 未満の周波数の信号はそのまま通し、F_e を超える周波数の信号は一切通さない。

$\widehat{h}(\omega)$ は周期 2π なので、グラフは、幅 2π の区間、普通は $(-\pi, \pi]$ で描かれる。

サンプリング定理によると、x から X がきちんと復元できるためには、周波数 F (> 0) について次が成り立つことが必要十分である:

(4) $$F < \frac{F_s}{2}.$$

$\omega = \pm\pi$ は、周波数 $F = \dfrac{|\pm\pi|}{2\pi} F_s = \dfrac{1}{2} F_s$ に対応している。(サンプリング定理により、これは再現可能な信号の周波数の上限である。)

言い換えると、再現可能な信号の角周波数は

(5) $$|\Omega| < \frac{\Omega_s}{2}.$$

このとき、次式が成立する。

$$|\omega| < \pi.$$

一般の Ω に対しては、$\omega = \Omega T_s$ は $(-\pi, \pi)$ に属するとは限らない。

$$\omega' \equiv \omega \pmod{2\pi}, \quad \omega' \in (-\pi, \pi]$$

で定まる ω' を正規化角周波数とよぶ。

課題 No. 3 [A]

$$\widehat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2) \\ 0 & (|\omega| < \omega_1 \text{ または } \omega_2 < |\omega| \leq \pi) \end{cases}$$

であるデジタル・フィルターで、信号はどのように変化するか。

参考文献