

信号処理とフーリエ変換 レポート課題 1

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier2021/kadai1.pdf>

締め切りは11月10日(水曜) 15:20。Oh-o! Meiji で提出する。フォーマットはA4サイズのPDF (なるべく1つのファイル)。レポートの先頭に学年、組、番号、氏名を書くこと。ページ番号をつけること。手書きしたものをスキャンしても構わない。

(2021/10/26 追記) レポート本文以外に、付録として、Mathematica のノートブックや、それをPDF化したものを添付しても構わない。「なるべく1つのファイル」は、本文を1つのファイルにするという意味に解釈する。

PDF ファイルの準備の仕方については

「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」¹

を参考にせよ。

課題 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は周期 2π の周期関数で、

$$\begin{aligned} f(x) &= \cosh x \quad (-\pi < x \leq \pi), \\ g(x) &= \sinh x \quad (-\pi < x < \pi), \quad g(\pi) = 0 \end{aligned}$$

を満たすとする。

- (1) f と g のグラフを描き、(三角関数版の)Fourier 級数を求め、その収束について説明せよ。
- (2) コンピューターを用いて、 f の Fourier 級数の N 項までの部分 $s_{N,f}$ と f のグラフを描け。 g の Fourier 級数の N 項までの部分 $s_{N,g}$ と g のグラフを描け。グラフを描くためのプログラムやコマンドも記すこと。その結果を用いて Gibbs の現象について簡単に説明せよ。
- (3) $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi_n(x) = \sin \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x \right]$ とおく。

(a) 区間 $[0, 1]$ で定義された区分的 C^1 級の関数 φ, ψ に対して、 $(\varphi, \psi) := \int_0^1 \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$ と定めるとき、 (φ_n, φ_m) を求めよ。

(b) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ が C^1 級で $f(0) = 0$ を満たすならば、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (x \in [0, 1])$$

が成り立つような $\{c_n\}$ が存在することが知られている (これは証明せずに認めて良い)。 c_n を求めよ (f と n を用いて表せ)。

注 (2021/10/26 追記) (3) の f は (1), (2) の f ($f(x) = \cosh x$) とは別物で、 $[0, 1]$ で定義された任意の C^1 級関数です。

¹http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf/