2021年度 信号処理とフーリエ変換 期末レポート課題

桂田 祐史

2022年1月21日 16:00公開

問題は2ページ目以降にある。

- 〆切は1月23日(日) 23:00、Oh-o! Meijiで提出すること。なるべく1月23日21:00までに提出することを勧める。それ以降になる場合は一度連絡すること。〆切後の提出は原則として認めない。
- ネットワーク、サーバー等の障害に遭遇したら、連絡すること。〆切の延長などの措置を取る可能性がある。
- 疑問点が生じたら、なるべく早くメール (katurada あっとまーく meiji ドット ac どっと jp) で質問すること。

  以下の日時にメール・チェックして、2時間以内に回答する (1月21日18:00, 22:00, 1月22日8:00, 17:00, 1月23日9:00, 12:00, 17:00, 21:00)。

  質問に対する回答のうち主なものは、授業WWWサイト http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/fourier/ で公開し、そのことをOh-o! Meijiを使って通知する。
- 1月24日午前0時までは、問題の内容について、私(桂田)以外の人に質問・相談しないこと。酷似した答案が見つかった場合は、呼び出して事情を尋ねる(Meiji Mailはチェックするように)。
- レポートはA4サイズのPDFで提出すること。ページ数制限はない。最初のページの一番上に学年・組・番号(学生番号ではない1〜2桁の数)・氏名を記入すること。ページ番号をつけること。数式が正しく鮮明に表記される限り、PDFの作成方法は問わない(手書き、TEX, Word, …何でも良い)。なるべく単一のPDFで提出することが望ましいが、サイズが30MBを超えるものは複数のファイルに分割して "追加提出" すること。
- 大問の解答はひとまとめにすること。(例えば **1** の(1)と(2)を離れた場所に書いたりせず、**1** の(1),(2),(3)を1箇所にまとめる。)
- 講義資料、参考書、ネットの情報など、何を参考にしても構わない。
- 計算の途中経過・根拠も適当にレポートに書くこと(ポイントとなることが書いてあれば、計算結果が間違っていても中間点をつける場合がある)。それとは別に、計算結果の確認にコンピューターを使っても良い。
- 記号等は授業で説明したものであれば、断りなく用いて構わない。授業で説明していない記号を用いる場合は、その定義を記すこと(他資料を参考にしたときは注意すること)。
- 特に指示のない限り、授業で証明した定理は証明抜きに用いて良い(授業内容のコピー&ペーストをする必要はない)。授業中に説明していない定理を用いるときは、証明してから用いること。

以下の **1**〜**5** を解答せよ。記号や用語の定義は授業に準じる (Fourier 変換は資料によって、定数因子等に違いがあるので注意すること)。

1 月 24 日午前 0 時までは、問題の内容について、私 (桂田) 以外の人に質問・相談しないこと。

1. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は、ともに周期 2π の周期関数で、次の式を満たすとする。

$$f(x)=\cos\frac{x}{2},\quad g(x)=\sin\frac{x}{2}\quad (0\le x<2\pi).$$

(1) 関数 f と g のグラフを描け。　(2) 関数 f と g の Fourier 級数展開を求めよ。
(3) 関数 f と g の Fourier 級数展開のうち、どちらが一様収束するか。また、そう判断する根拠を述べよ。

2. 正の数 a に対して、$f_a\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f_a(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}(a-|x|) & (|x|\le a)\\ 0 & (|x|>a)\end{cases}$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。

(1) f_a の Fourier 変換 $\widehat{f_a}$ を求めよ。　(2) $\displaystyle\lim_{a\to+0}\widehat{f_a}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ であることを示せ。

注 (1) が出来れば (2) は簡単である ((2) は (1) の解答の正しさのチェック用の問)。

3. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は性質が良い (連続で、$|x|\to\infty$ とするとき十分速く減衰する) と仮定する。任意の $\xi\in\mathbb{R}$ に対して

$$a(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\xi x)dx,\quad b(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(\xi x)dx$$

とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) a は偶関数、b は奇関数であることを示せ。

(2) $a(\xi)-ib(\xi)$ と、f の Fourier 変換 $\widehat{f}(\xi)$ との関係を述べよ。

(3) Fourier 変換の反転公式を用いて、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(a(\xi)\cos(\xi x)+b(\xi)\sin(\xi x)\right)d\xi\quad (x\in\mathbb{R}).$$

4. 数列 $f=\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と $a\in\mathbb{Z}$ に対して、以下の問に答えよ。

(1) f が $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)|<\infty$ を満たす場合に、関数 $\mathscr{F}f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を

$$\mathscr{F}f(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)e^{-in\omega}\quad (\omega\in\mathbb{R})$$

で定めるとき、

$$(\heartsuit)\qquad \mathscr{F}\left[f(n)e^{ina}\right](\omega)=\mathscr{F}f\left(\boxed{\quad あ\quad}\right)\quad (\omega\in\mathbb{R})$$

が成り立つ。$\boxed{\quad あ\quad}$ を埋めて、$(\heartsuit)$ を証明せよ。

(2) $N \in \mathbb{N}$ に対して、$\omega := e^{2\pi i/N}$ とおく。f が周期 N の周期数列である場合に、数列 $\mathscr{F}f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を

$$\mathscr{F}f(j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\omega^{-nj} \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

で定めるとき、

$$(\diamondsuit) \qquad \mathscr{F}[f(n)\omega^{an}](j) = \mathscr{F}f\left(\boxed{\text{い}}\right) \qquad (j \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ。$\boxed{\text{い}}$ を埋めて、($\diamondsuit$) を証明せよ。

(補足説明) 普通の Fourier 変換について、よく似た公式を授業で学んでいる。離散時間 Fourier 変換と離散 Fourier 変換については、対応する公式を紹介しなかったので、それを尋ねてみる、という主旨である。もし $\mathscr{F}$ が書きにくければ、$\mathcal{F}$ と書いても良い。

5. 以下の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{エ}}$ を埋め、根拠を簡単に説明せよ。

ほぼ周期的と考えられる音を 5 秒間サンプリングして (簡単のためモノラル録音とする)、240000 個のサンプルを得た。サンプリング周波数は $\boxed{\text{ア}}$ である。$\boxed{\text{イ}}$ までの周波数の信号を復元できる事になる。このデータ全体を離散 Fourier 変換して得られた離散フーリエ係数を $C_0, C_1, \cdots, C_{N-1}$ とする。$1 \le n < N/2$ を満たす n に対して、C_n と C_{N-n} は周波数 $\boxed{\text{ウ}}$ の信号成分を表している。各サンプルが実数であることから、C_n と C_{N-n} の間には $\boxed{\text{エ}}$ という関係が成り立つ。