

2019 年度 信号処理とフーリエ変換 期末試験問題

2020 年 1 月 29 日 (水曜) 15:00~16:00 施行

担当 桂田 祐史

ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

以下の 6 問の中から 5 問を選択して解答せよ。各問の解答の順番は自由である (各問の解答は一箇所にまとめること)。

問 1. f と g は \mathbb{R} で定義された周期 2π の周期関数であり、 $f(x) = x^3$ ($-\pi < x \leq \pi$), $g(x) = 3x^2$ ($-\pi < x \leq \pi$) を満たすとする。このとき、以下の間に答えよ。

(1) f と g のグラフを描け。(2) f と g の Fourier 級数を求めよ。(3) f と g の Fourier 級数のうち、一様収束するのはどちらか、理由をつけて答えよ。

問 2. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ を $g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$ で定めるとき、以下のものを求めよ。

(1) $\mathcal{F}g$ (2) $\mathcal{F}(\mathcal{F}g)$ (3) $\mathcal{F}[g(x-1)](\xi)$ (注: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx$)

問 3. 周期 2π の周期関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 $\mathcal{F}f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx$ ($n \in \mathbb{Z}$) とおく。また周期 2π の周期関数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ の畳み込み $f * g$ を $f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y) dy$ ($x \in \mathbb{R}$) で定める。このとき $\mathcal{F}(f * g)(n) = \mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n)$ が成り立つことを示せ。

問 4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で、 $x \rightarrow \pm\infty$ のとき十分速く 0 に収束すると仮定する。このとき

(a) $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ ($x \in \mathbb{R}, t > 0$),

(b) $u(x, 0) = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$)

を満たす関数 $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を求めることを考える。

(1) a は正の定数, $\varphi(x) = e^{-ax^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) とするとき、 $\mathcal{F}\varphi$ は何か? (結果だけ書けば良い。)

(2) $\hat{u}(\xi, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-ix\xi} dx$ の満たす微分方程式の初期値問題を導き、 $\hat{u}(\xi, t)$ を求めよ。

(3) $\hat{u}(\xi, t)$ の ξ に関する共役 Fourier 変換を計算して、 $u(x, t)$ を求めよ。

問 5. N を 2 以上の自然数として、 x_j ($j \in \mathbb{Z}$) を $h = 2\pi/N$, $x_j = jh$ で定める。 $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\varphi_n(x) := e^{inx} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \varphi_n := (\varphi_n(x_0), \varphi_n(x_1), \dots, \varphi_n(x_{N-1}))^T$$

とおく (ただし T は転置を表す)。

(1) $n, m \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq N-1, 0 \leq m \leq N-1$ とするとき、内積 (φ_n, φ_m) を計算せよ。

(2) 行列 U を $U := (\varphi_0, \dots, \varphi_{N-1})$ で定めるとき、逆行列を求めよ。結果だけでなく、途中経過を書くこと。

問 6. $S = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ を離散信号の全体、 $F: S \rightarrow S$ を線形定常フィルター、 h を F の単位インパルス応答、 \hat{h} を h の離散時間 Fourier 変換とする ($\hat{h}(\omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-ik\omega}$)。このとき以下の間に答えよ。

(1) F の単位インパルス応答とは何か説明せよ。(2) $\omega > 0$ とするとき、 $x \in S$ を $x(n) = \sin(n\omega)$ ($n \in \mathbb{Z}$) で定めるとき、 $F[x] = \hat{h}(\omega)x$ であることを示せ。(3) $f = 441, T_s = \frac{1}{44100}$ に対して、 $Y(t) := \sin(2\pi ft)$

($t \in \mathbb{R}$), $y(n) := Y(nT_s)$ ($n \in \mathbb{Z}$) とおく。 $\hat{h}(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \frac{\pi}{100}) \\ 0 & (|\omega| > \frac{\pi}{100}) \end{cases}$ と仮定するとき、 $F[y]$ を求め、その結果を説明せよ。

1. 確認コード

```

FourierSinCoefficient[x^3, x, n]
Plot[Sum[(-1)^n (-6 + n^2 Pi^2)/n^3 Sin[n x], {n, 1,
10}], {x, -3 Pi, 3 Pi}]

FourierCosCoefficient[3 x^2, x, n]
Integrate[3 x^2, {x, -Pi, Pi}]/Pi
g0[x_] := 3 x^2
g[x_] := g0[Mod[x, 2 Pi, -Pi]]
Plot[{g[x],
Pi^2 + Sum[12 (-1)^n/(n^2) Cos[n x], {n, 1, 10}]}, {x, -3 Pi, 3 Pi}]

```

(1) グラフは次のようになる。

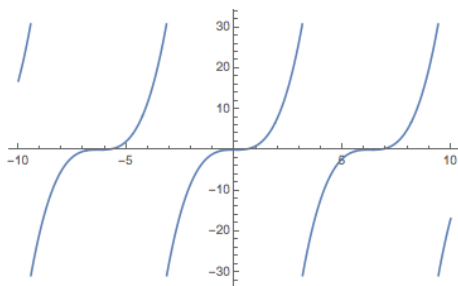


図 1: f のグラフ

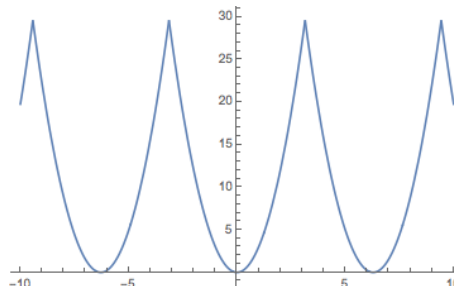


図 2: g のグラフ

(2) f は奇関数であるから、 $a_n = 0$.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^3 \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{x^3 \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 3x^2 \frac{\cos nx}{n} \, dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n \pi^3}{n} + \left(\left[3x^2 \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 6x \frac{\sin nx}{n^2} \, dx \right) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n \pi^3}{n} + \left(\left[6x \frac{\cos nx}{n^3} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 6 \frac{\cos nx}{n^3} \, dx \right) \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n \pi^3}{n} + 6\pi \frac{(-1)^n}{n^3} \right) = \frac{2(-1)^{n-1} (n^2 \pi^2 - 6)}{n^3}.
 \end{aligned}$$

ゆえに f の Fourier 級数展開は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1} (n^2 \pi^2 - 6)}{n^3} \sin nx.$$

あるいは

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) (-1)^n \sin nx.$$

g は偶関数であるから $b_n = 0$. また $n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 3x^2 \cos nx \, dx = \frac{6}{\pi} \left(\left[x^2 \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{\sin nx}{n} \, dx \right) \\
 &= -\frac{12}{n\pi} \left(\left[x \frac{-\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n^2} \, dx \right) = -\frac{12}{n\pi} \pi \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{12(-1)^n}{n^3}. \\
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0 \cdot x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 3x^2 \, dx = \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = 2\pi^2.
 \end{aligned}$$

ゆえに g の Fourier 級数展開は

$$g(x) = \pi^2 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

(3) f は区分的 C^1 級であるが、 $(2k-1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) は左右からの極限値の異なる不連続点である。ゆえに f の Fourier 級数では Gibbs の現象が起こり、一様収束はしない。一方 g は連続かつ区分的 C^1 級であるから、 g の Fourier 級数は一様収束する。 ■

問 2

(1)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 (1-|x|)(\cos(x\xi) - i\sin(x\xi)) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (1-x)\cos(x\xi) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\left[(1-x)\frac{\sin(x\xi)}{\xi} \right]_0^1 - \int_0^1 (-1) \cdot \frac{\sin(x\xi)}{\xi} dx \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{\cos(x\xi)}{\xi^2} \right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \xi}{\xi^2}.\end{aligned}$$

(2)

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}g)(\xi) = g(-\xi) = g(\xi) = \begin{cases} 1 - |\xi| & (|\xi| < 1) \\ 0 & (|\xi| > 1). \end{cases}$$

(3) $u = x - 1$ とおくと、 $dx = du$, $e^{-ix\xi} = e^{-i(u+1)\xi} = e^{-iu\xi}e^{-i\xi}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g(x-1)](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-1)e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-iu\xi}e^{-i\xi} du = e^{-i\xi}\mathcal{F}g(\xi) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-i\xi}(1 - \cos \xi)}{\xi^2}. \blacksquare\end{aligned}$$

問 3 $h := f * g$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)e^{-inx} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx} dx \right) g(y) dy.\end{aligned}$$

右辺の () 内の積分を変数変換する。 $u = x - y$ とおくと、 $dx = du$, $x = -\pi$ のとき $u = -\pi - y$, $x = \pi$ のとき $u = \pi - y$, $x = u + y$, $e^{-inx} = e^{-in(u+y)n} = e^{-inu}e^{-iny}$ であるから、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{-inx} dx = \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)e^{-in(u+y)} du = e^{-iny} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(u)e^{-inu} du.$$

関数 $u \mapsto f(u)e^{-inu}$ は周期 2π であるから、 $[-\pi - y, \pi - y]$ での積分は $[-\pi, \pi]$ での積分に等しい。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](n) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-iny} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu} du \right) g(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu} du \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny} dy \\ &= \mathcal{F}f(n)\mathcal{F}g(n). \blacksquare\end{aligned}$$

「 f が周期的だから」とか、単に「周期性から」は 2 点減点します (必要なのは被積分関数 $f(u)e^{-inu}$ が周期 2π であることです)。何も言わず最初から $\int_{-\pi}^{\pi}$ とするのは 8 点減点 (それは明らかにおかしい)。

問 4

(1) 結果だけで良いけれど、個人的には丸暗記している訳ではないので、次のように解く (参考までに)。

$$-ax^2 - ix\xi = -a\left(x^2 + ix\xi/a\right) = -a\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4a}.$$

また $u = \sqrt{ax}$ とおくと、 $dx = \frac{du}{\sqrt{a}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

ゆえに (積分路の変形をして)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\varphi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+i\xi/2)^2} e^{-\xi^2/(4a)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/(4a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/(4a)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \end{aligned}$$

(2) (a), (b) を x について Fourier 変換すると

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t), \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi).$$

ゆえに

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi).$$

(3) 一般に $\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}f \mathcal{F}g$ である。

$$G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^* [e^{-t\xi^2}] (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} [e^{-t\xi^2}] (-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

とおくと、

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{F} [G(\cdot, t)] (\xi) = e^{-t\xi^2}.$$

ゆえに

$$\hat{u}(\xi, t) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F} [G(\cdot, t)] (\xi) \mathcal{F}f(\xi) = \mathcal{F} [G(\cdot, t) * f] (\xi).$$

ゆえに

$$u(x, t) = G(\cdot, t) * f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy. \blacksquare$$

問 5 (離散 Fourier 変換の選点直交性と、それを用いた逆変換の導出という、理論の「まん中部分」を抜き出してみる、という問題)

(1) 任意の $n, j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\varphi_n(x_j) = \varphi_n(jh) = e^{inj h} = \omega^{nj}.$$

ただし

$$\omega := e^{ih} = e^{i\frac{2\pi}{N}} = e^{2\pi i/N}.$$

ゆえに

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} \omega^{n \cdot 0} \\ \omega^{n \cdot 1} \\ \vdots \\ \omega^{n \cdot (N-1)} \end{pmatrix}.$$

ゆえに $n, m \in \mathbb{Z}, 0 \leq n \leq N-1, 0 \leq m \leq N-1$ とするとき

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{nj} \overline{\omega^{mj}} = \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{(n-m)j} = \begin{cases} N & (n-m \equiv 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} = \begin{cases} N & (n=m) \\ 0 & (n \neq m). \end{cases}$$

(2)

$$U = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = \left(\omega^{(j-1)(k-1)} \right).$$

$$U^*U = \begin{pmatrix} \varphi_0^* \\ \varphi_1^* \\ \vdots \\ \varphi_{N-1}^* \end{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = (\varphi_j^* \varphi_k) = ((\varphi_k, \varphi_j)) = (N\delta_{kj}) = NI.$$

ゆえに

$$U^{-1} = \frac{1}{N}U^* = \frac{1}{N} \left(\overline{\omega^{(k-1)(j-1)}} \right) = \frac{1}{N} \left(\omega^{-(k-1)(j-1)} \right).$$

(時間切れによって中断)